Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2018-2019
Fondamentaux des Mathématiques 1

Feuille d'exercices N°8
ARITHMÉTIQUE

Exercice 1
Effectuer la division euclidienne de a par b pour les valeurs de a et b suivantes :

1. $a = 2867$ et $b = 6$ 2. $a = 7813$ et $b = -12$
3. $a = -959$ et$b = 6$ 4. $a = -1733$ et $b = -5$.

Exercice 2
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que si b divise a, alors $2^b - 1$ divise $2^a - 1$.
2. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. Vérifier que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

Exercice 3
Démontrer qu'il n'existe pas de couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $7a - 4b^3 = 1$.
Indication : raisonner modulo 7

Exercice 4

1. (a) Déterminer $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $7^{k_0} \equiv 1$ [12].
   (b) Déterminer $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $6^{k_1} \equiv 0$ [12].
   (c) Déterminer $(k_2, k_3) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_2 < k_3$ et $3^{k_2} \equiv 3^{k_3}$ [12].
   (d) Déterminer les restes de la division euclidienne par 12 des nombres suivants : 7^{30}, 6^{13}, 3^{17}, 31^{77}, $19^5 + 30^{144} + 15^{10}$.
2. Démontrer que $2^{123} + 3^{121}$ est divisible par 11.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 122^{137} par 9.

Exercice 5
Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de 3^{1111}.

Exercice 6

1. Calculer le plus grand diviseur commun de 126 et 230.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et soit d le plus grand diviseur commun de a et b. Démontrer qu'un entier n divise a, b et c si et seulement s'il divise c et d. Définir le plus grand diviseur commun de trois entiers.
3. Calculer le plus grand diviseur commun des nombres suivants :

   1. 390, 720 et 450 2. 180, 606 et 750.

Exercice 7
Déterminer les couples d'entiers naturels (m, n) tels que

1. $\text{pgcd}(m, n) = 18$ et $m + n = 360$ 2. $\text{pgcd}(m, n) = 18$ et $mn = 6480$.

Exercice 8
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Démontrer que si $a \wedge b = 1$, alors pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a l'équivalence : $ap = bq$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = bk$ et $q = ak$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 9
Trouver les couples (a, b) solutions des équations suivantes :

1. $18a + 5b = 11$ 2. $39a - 12b = 121$ 3. $14a - 21b = 49$.

Exercice 10
Déterminer les solutions $n \in \mathbb{Z}$ des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} n \equiv 1\ [20] \\ n \equiv 3\ [7] \end{cases}$ 2. $\begin{cases} n \equiv 13\ [15] \\ n \equiv 6\ [10] \end{cases}$ 3. $\begin{cases} n \equiv 11\ [15] \\ n \equiv 6\ [10] \end{cases}$ 4. $\begin{cases} n \equiv 3\ [224] \\ n \equiv 17\ [119] \end{cases}$

Exercice 11
Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquels la fraction $\dfrac{n+2}{n+9}$ est irréductible ?

Exercice 12

1. Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. Démontrer que, si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.
2. Étant donné $n \in \mathbf{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$; cet entier est le *n-ième nombre de Fermat.*
   (a) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$F_{n+1} = F_0 F_1 \cdots F_n + 2.$$
   (c) En déduire que F_n et F_m sont premiers entre eux si m et n sont distincts.
3. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 13

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 12.
2. Énumérer les diviseurs de 12.

Exercice 14

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de N le nombre $\sigma_0(N)$ de diviseurs positifs de N et leur somme $\sigma_1(N)$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers positifs possédant 6 diviseurs positifs dont la somme est 28.

Exercice 15
Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, le nombre entier $n^5 - n$ est divisible par 15.

Exercice 16
On se propose de déterminer toutes les solutions dans $\mathbf{N}^3$ de l'équation (E) $x^2 + y^2 = 3z^2$.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$ une solution de (E). En raisonnant modulo 4, démontrer que l'on peut écrire $x = 2x', y = 2y'$ et $z = 2z'$, où $(x', y', z') \in \mathbf{N}^3$ est une solution de (E).
2. En raisonnant par descente infinie, démontrer que $(0, 0, 0)$ est l'unique solution de (E) dans $\mathbf{N}^3$.