Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 6

NOMBRES RÉELS ET SUITES RÉELLES

Exercice 1. Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

1. On note $-A = \{ -a \,|\, a \in A \}$.
   (a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup(-A)$ existe et que dans ce cas $\inf A = -\sup(-A)$.
   (b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf(-A)$ existe et que dans ce cas $\sup A = -\inf(-A)$.
2. Soit $B \subset A$ non vide.
   (a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leqslant \sup A$.
   (b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geqslant \inf A$.

Exercice 2. Déterminer pour les ensembles qui suivent s'ils possèdent des bornes supérieure et inférieure. Le cas échéant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

(1) $[0, 1[$

(2) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^\star \right\}$

(3) $\left\{ \frac{m}{mn+1} \;\middle|\; (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star \right\}$

(4) $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbf{Q}$

Exercice 3. On appelle *nombre dyadique* tout nombre rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbf{R}$.

Exercice 4.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{Z}$.
   Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $D \subset \mathbf{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on pose :

$$f^*(y) = \sup_{x \leqslant y} f(x).$$

1. Illustrer la définition de f^* par des figures rapides à main levée sur différents exemples de fonctions f.
2. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
3. Étudier la monotonie de f^*.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On veut établir que f possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
Posons
$$T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}.$$

1. — Démontrer que T possède une borne inférieure t.
   — Démontrer que $f(t)$ minore T.
   — Établir l'inclusion $f(T) \subset T$.
   — En déduire que t est un point fixe de f.
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0,1[$ dans $[0,1[$?

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}_+^*$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $N \geq N_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. Qu'en est-il si $\ell \neq 0$?

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier la convergence de la suite $(\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbf{N}}$ de deux manières différentes :

1. en commençant par chercher une expression simple de $\max\{x,y\}$ en fonction de x et y pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ (*Indication : on pourra s'intéresser à* $\max\{x,y\} + \min\{x,y\}$ *et* $\max\{x,y\} - \min\{x,y\}$) ;
2. en revenant à la définition de la limite.

Exercice 10. Étudier la convergence des suites suivantes :

(a) $(u_n) = \left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$

(b) $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\left(n - \dfrac{1}{n}\right) - n^2\right)$

(c) $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{2}{n^2}\right)^3 - n^3\right)$

(d) $(u_n) = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$

(e) $(u_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$

(f) $(u_n) = \left(\frac{2n^6+5n+1}{n^6-1}\right)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}}$.

Exercice 11. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 12. *Suites arithmético-géométriques.*
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et soit $u^{(0)} \in \mathbf{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n). (*Indication : on distinguera les cas* $|a| < 1$, $|a| > 1$ *et* $a = -1$).
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 13. Étudier la convergence des suites suivantes :

(a) $(u_n) = (n(-1)^n)$

(b) $(u_n) = \left(\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}\right)$

(c) $(u_n) = (\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$

(d) $(u_n) = \left(2 + \frac{\sin(n)-4}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$

(e) $(u_n) = (n^{\frac{1}{\ln n}})_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}}$

(f) $(u_n) = \left(\frac{(-5)^n+n}{3^n-1}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$

(g) $(u_n) = \left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

1. Étudier la convergence des suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{n^2+n})_{n\in\mathbf{N}}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas .

Exercice 15. *Irrationalité de e.*
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Nous allons démontrer que e est un nombre irrationnel en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers naturels $p, q \geqslant 1$ tels que $e = \frac{p}{q}$.
   — Établir l'encadrement $u_q < e < v_q$.
   — Vérifier que $q!u_q$ et $q!v_q$ sont deux nombres entiers consécutifs.
   — Conclure le raisonnement.

Exercice 16.

1. Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. On définit $\varphi : [3,5] \to [3,5]$, $x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de φ.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $|\varphi(x) - 4| \leq \frac{|x-4|}{2}$.
3. On considère la suite $(u_n) \in [3,5]^{\mathbf{N}^\star}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{u_n}$.
   (a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
   (b) Déterminer un entier $N \in \mathbf{N}^\star$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Exercice 17. *Calcul approché de $\sqrt{a}$.*

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.
3. Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.
   Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n} \underset{n\infty}{\to} 0$.

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 19. *Somme harmonique*

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la suite (u_n).

Exercice 20. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Exercice 21.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1-u_n), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbf{R}$, la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x(1-x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

4. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
5. Montrer que les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1/2[$ sont stables par f et que f est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.*
6. On suppose que $u_0 \in]0, 1/2[$. Montrer que la suite (u_n) est alors croissante *(On pourra s'aider de la question 3.)* En déduire la nature de la suite (u_n). Même question si $u_0 \in]-\infty, 0[$.
7. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]1/2, +\infty[$.

Exercice 22.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbf{R}$, la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x(x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
4. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
5. Montrer que l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle.
6. On suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de u_0 *(On pourra étudier le signe de $(f \circ f)(x) - x$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$).* Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
7. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
8. On suppose que $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$?
9. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.

Exercice 23.

En suivant la démarche décrite dans les exercices 20 et 21, étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est donnée par :

1. $f(x) = x^2$,
2. $f(x) = x^2 + 1$,
3. $f(x) = \sqrt{1+x}$,
4. $f(x) = 1 + \ln(x)$,
5. $f(x) = e^x - 1$,
6. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

Pour certaines valeurs de u_0, la suite (u_n) peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

Exercice 24.

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

Exercice 25.

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 26.

Soient I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

— l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution x_n ;

— la fonction f_n est strictement croissante sur I ;

— pour tout $x \in I$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n\in N}$.
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.
3. Application : considérer la suite des fonctions f_n définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$.

Exercice 27.

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbf{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbf{R}_+$. Étudier la limite de la suite (x_n).

Exercice 28. *Lemme de Cesàro*[1].

1. Soit (u_n) une suite réelle. On définit la suite (v_n) dont le terme général est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

   Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors (v_n) converge également vers ℓ.

2. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ. .
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

   Démontrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ.

4. Déduire de ce qui précède

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

   (*Indication : pour la seconde suite, on pourra utiliser l'exercice 18*)

1. Ernesto Cesàro. Naples 1859 - Torre Annunziata 1906. Mathématicien italien.