Feuille d'exercices n° 5
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1. la fonction f s'annule ;
2. la fonction f est toujours nulle ;
3. f n'est pas une fonction constante ;
4. f est croissante ;
5. f est décroissante ;
6. f présente un minimum ;
7. f présente un maximum.

Exercice 2. Donner la négation des assertions de l'exercice précédent.

Exercice 3. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :

$$(a) A \subset B \qquad (b) A \cap B = A \qquad (c) A \cup B = B \qquad (d) A \setminus B = \emptyset$$

3. Montrer l'équivalence des propositions :

$$(a) A \cup B = A \cap C \qquad (b) B \subset A \subset C$$

4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C.$$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases} \quad 2. g : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases} \quad 3. h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - y, 4x - 2y) \end{cases} \quad 4. k : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$$

Exercice 5. Soit :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{et soit} \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \qquad \qquad \qquad n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

Exercice 7. Soit f une application de E vers F avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. f est surjective
3. f est bijective

Exercice 8. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \rightarrow I_n$?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de I_p dans I_n ?
3. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \rightarrow I_n$ qui soit injective, surjective, bijective?

Exercice 9. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E .

Exercice 10.

Soit E un ensemble, avec $\text{Card}(E) = n$. Démontrer que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$,

- en utilisant les coefficients $\binom{n}{k}$;
- en raisonnant par récurrence sur n .

Exercice 11. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F . Soient A et B deux parties de E . Montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 13. Soient E, F deux ensembles non vides. Soient A une partie de E , B une partie de F et f une application de E dans F . Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si A est une partie finie de E , alors $f(A)$ est une partie finie de F .
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F , alors A est une partie finie de E .
3. Si B est une partie finie de F , alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E .
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E , alors B est une partie finie de F .

Exercice 14. Soient E un ensemble fini non vide, F un ensemble quelconque, et f une application de E dans F .

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$.

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et E un ensemble à n éléments. Soit $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $x \in f(x)$ et que pour tous $x, y \in E$, on a l'implication $x \in f(y) \Rightarrow y \in f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\text{Card } f(x) \geq 1$.
2. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $\text{Card } f(a) = n$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\text{Card } f(x) \geq 2$.
3. Montrer qu'il existe des éléments $x, y \in E$ différents tels que les ensembles $f(x)$ et $f(y)$ aient le même nombre d'éléments.

Exercice 16. Soit E un ensemble avec $\text{Card}(E) = n$.

1. Calculer le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \subset B\}$.
Indication : pour chaque B compter les parties $A \subset B$.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B$ équivaut à $A^C \cup B = E$.
3. En déduire le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E\}$.

Exercice 17. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;
5. $f : \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3|\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$;
6. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$.

Exercice 18. Décrire les ensembles qui suivent.

- (a) $\tan(\{0\}) ; \sin^{-1}(\{2\}) ; \cos^{-1}([0, 1])$;
- (b) $(\cos_{|[3, 7]})^{-1}([0, 1]) ; (\cos_{|[0, \pi]})^{-1}([0, 1]) ; \sqrt{\cdot}([0, 1])$;
- (c) $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
- (d) $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; $f^{-1}([-1, 1 \cup \{2\}])$ et $f([0, 1]^3)$
pour $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto y$;
- (e) $|\cdot|([-2, -1] \cup [2, 4]) ; (|\cdot|_{|[-8, 7]})^{-1}([2, 3]) ; |\cdot|^{-1}(\{1\})$;
- (f) $\exp(]-\infty, 2]) ; \exp^{-1}([-1, e]) ; \ln(\mathbb{R}_-)$;
- (g) $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.

Exercice 19. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que

$$f \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) .$$

2. Pour l'inclusion de la question précédente, donner un contre-exemple à l'inclusion réciproque.

3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que

$$f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1} \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) .$$

Exercice 20. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

(i) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x); [\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;

(ii) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y); \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$;

(iii) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

(iv) $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 7, 9, 11\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;

(v) $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto -(x - 1); \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$.

Exercice 21. On considère l'application $f : I \rightarrow J, x \mapsto x^2$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Trouver I et J tels que :

1. f est injective mais pas surjective;
2. f est surjective mais pas injective;
3. f est bijective.

Exercice 22. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 23. Soit E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 24. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$.

1. Montrer que, pour tout $B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
2. En déduire que si f est surjective alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Montrer que, pour tout $A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que si f est injective alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.