Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

Révisions d'Analyse - Fonctions réelles

ORDRE ET INEGALITÉS

Exercice 1. Ordonner les nombres qui suivent : 2 ; 1 ; $\frac{13}{15}$; $\frac{7}{8}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Exercice 2.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x = \sqrt{x^4}$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1-x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{1-x}{3x+2}$.

Exercice 3. Donner les ensembles de définition maximaux des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto t^2 + t + 3$
2. $t \mapsto \sqrt{(t-1)(t+1)}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 6}$
4. $x \mapsto \ln(x^2 - 4)$

PARITÉ ET COMPOSITION

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall x \in \mathbb{R}\,, f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = x$.

Exercice 5. Soit $f :]0,1[\to]0,1[$ telle que $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in]0,1[\cap \mathbb{Q} \\ 1-x \text{ sinon} \end{cases}$.
Montrer que $f \circ f = id$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 7.

1. Soient f et g deux fonctions réelles paires. Que peut-on dire sur la parité de la somme ? du produit ? et de la composée ?
2. Etudier le cas f et g impaires.
3. Etudier le cas f paire et g impaire.

Exercice 8.

1. Montrer que toute fonction impaire définie en 0 vérifie $f(0) = 0$.
2. Montrer que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
3. Montrer que toute fonction réelle se décompose en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire

DÉRIVATION ET COMPOSITION

Exercice 9. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sin(x^2(x+1)) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll}]1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(\ln(x)) \end{array} \qquad h: \begin{array}{ll}]-\pi/2, \pi/2[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

Exercice 10. Retrouver les dérivées classiques des fonctions suivantes à l'aide du résultat sur la dérivation de fonctions réciproques :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{1/3} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln x \end{array}$$

ETUDES DE FONCTIONS

Exercice 11.

PARTIE A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer g' et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de g.

PARTIE B Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer f'. Dresser le tableau de variations de f.
   Indication : On pourra s'aider de la partie A
3. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha\,(1 + 2\exp(-\alpha))$.
4. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer T puis $(\mathcal{C})$ (on admettra que $0.35 < \alpha < 0.36$ et que $0.85 < f(\alpha) < 0.86$).

Exercice 12. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x - \dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

Exercice 13. Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[\,,\ x \longmapsto x^2 - 1$. Cette fonction est-elle bijective ?

Exercice 14.

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto n+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto n+1 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2+1 \end{array}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
   (a) f est-elle injective ? Surjective ?
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \in [-1, 1]$.
   (c) Montrer que la restriction $g = f_{|[-1,1]}$ est une bijection.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2x/(x^2+1)$.

1. f est-elle injective ? surjective ? *Indication : pour l'injectivité, on pourra montrer que pour tous réels u, v, on a $f(u) = f(v) \Leftrightarrow 2(v-u)(uv-1) = 0$. Pour la surjectivité, on pourra s'intéresser à l'équation $f(x) = 2$.*
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], x \longmapsto f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.