

---

Feuille d'exercices n° 10  
POLYNÔMES

---

**Exercice 1.1** (\*)

Déterminer tous les polynômes  $P$  vérifiant les relations suivantes :

1.  $P(X^2 + 1) = P(X)$ ,
2.  $P(2X + 1) = P(X)$ ,
3.  $(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n$ , où  $n \in \mathbf{N}$ ,
4.  $P'(X)^2 = 4P(X)$ ,
5.  $P(P(X)) = P(X)$ .

**Exercice 1.2** (\*)

Montrer que le polynôme  $P(X) = X^{163} - 24X^{57} - 6$  possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

**Exercice 1.3**

Soient  $a, b$  des réels, et  $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  le polynôme  $P$  est-il le carré d'un polynôme de  $\mathbf{R}[X]$  ?

**Exercice 1.4 (Polynômes de Tchebychev)** (\*)

On considère la suite de polynômes  $P_n(x)$  définie par  $P_0(X) = 1$ ,  $P_1(X) = X$ , et pour  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser  $P_2, P_3, P_4$ .
2. Déterminer le terme de plus haut degré de  $P_n$ .
3. Étudier la parité de  $P_n$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ , on a  $P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

**Exercice 1.5** (\*)

Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :

1.  $X + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ ,
2.  $X^2 - 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ ,
3.  $X^2 + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ ,
4.  $X^2 + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 1.6**

1. Soient  $P_1, P_2$  et  $Q$  trois polynômes. Montrer que  $P_1 - P_2$  divise  $Q(P_1) - Q(P_2)$ .
2. Soit  $P$  un polynôme. Montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - X$ .

**Exercice 1.7** (\*)

Quelles sont les racines (dans  $\mathbf{C}$ , dans  $\mathbf{R}$  et dans  $\mathbf{Q}$ ) des polynômes suivants ?

1.  $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ ,
2.  $X^n - 1$ , où  $n$  est un entier,

3.  $X^6 - 4$ ,
4.  $X^4 - 13X^2 + 36$ ,
5.  $X^4 + 6X^2 + 25$ .

**Exercice 1.8** (\*)

1. Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. Montrer que, pour tout  $a \in \mathbf{C}$ , on a  $\overline{P(a)} = P(\overline{a})$ .
2. Soit  $P, Q$  deux polynômes à coefficients complexes tels que  $P(x) = Q(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $P = Q$ .
3. Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $P(x) \in \mathbf{R}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $P \in \mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 1.9** (\*)

Calculer  $P(X) = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ . En déduire une preuve que 100011 n'est pas un nombre premier.

**Exercice 1.10**

Soit  $P$  un polynôme, et soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts. Soient  $\lambda$  (respectivement,  $\mu$ ) le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $X - a$  (respectivement, par  $X - b$ ). Calculer le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X - a)(X - b)$ . Commenter le cas  $\lambda = \mu = 0$ .

**Exercice 1.11**

Établir les identités, pour  $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1),$$

$$X^{2n+1} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \cdots + (-1)^p X^p \cdots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne  $M_n = 2^n - 1$  est premier, alors  $n$  est premier.
2. Si le nombre de Fermat  $F_n = 2^n + 1$  est premier, alors  $n$  est soit nul, soit une puissance de 2.

**Exercice 1.12** (\*)

Pour quels entiers  $n$  le polynôme  $X^{2n} + X^n + 1$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  (dans  $\mathbf{R}[X]$ ) ?

**Exercice 1.13** (\*)

Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1.  $X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ ,
2.  $X^{11} + 2^{11}$  dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ ,
3.  $X^4 + 4$  dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ , et enfin dans  $\mathbf{Q}[X]$ ,
4.  $X^4 - j$  dans  $\mathbf{C}[X]$ , où  $j = \exp(2i\pi/3)$ .
5.  $X^8 + X^4 + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .
6.  $X^5 - 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 1.14** (\*)

Soit  $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

1. Vérifier que  $i$  est racine de  $P$ .
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de  $P$  sur  $\mathbf{R}[X]$  et sur  $\mathbf{C}[X]$ .

**Exercice 1.15**

Soit  $a \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , et le polynôme  $P(X) = (\cos a + X \sin a)^n$ . Calculer le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $X^2 + 1$ .

---

Feuille d'exercices n° 10 BIS  
ENCORE DES POLYNÔMES

---

Sauf précision contraire, tous les polynômes considérés seront à coefficients complexes.

**Exercice 2.1**

Déterminer un polynôme  $P$  de degré 5 tel que  $P(X) + 1$  soit divisible par  $(X - 1)^3$  et  $P(X) - 1$  soit divisible par  $(X + 1)^3$ .

**Exercice 2.2** (\*)

On rappelle que  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

Soit le polynôme  $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ .

1. Montrer que  $j$  est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Décomposer  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  (on pourra utiliser judicieusement le fait que  $P$  est pair).

**Exercice 2.3**

Soit le polynôme réel  $P(X) = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1$ . On suppose que  $-1$  est une racine de  $P$ .

1. Déterminer  $a$ .
2. Montrer que  $-1$  est racine double de  $P$ .
3. Montrer que  $j$  est racine multiple de  $P$ .
4. Factoriser  $P$  en facteurs irréductibles, d'abord dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 2.4**

Soit  $\theta$  un réel, et  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer (sans le calculer) que le reste de la division euclidienne de  $X^n \sin \theta - X \sin n\theta + \sin(n-1)\theta$  par  $X^2 - 2X \cos \theta + 1$  est nul.

**Exercice 2.5** (\*)

Soient les polynômes  $A(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$  et  $B(X) = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$ . Calculer leur PGCD unitaire. En déduire un couple de polynômes  $(U_0, V_0)$  vérifiant l'identité de Bézout. Déterminer tous les couples de polynômes  $(U, V)$  vérifiant cette identité.

Reprendre l'exercice avec  $A(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$  et  $B(X) = X^3 - X^2 + 2X - 1$ .

**Exercice 2.6** (\*)

Soit  $n$  et  $m$  deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes  $X^n - 1$  et  $X^m - 1$ .

**Exercice 2.7** (\*)

Soient  $A, B$  et  $C$  des polynômes. Montrer que si  $A$  et  $B$  divisent  $C$ , et que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, alors  $AB$  divise  $C$ .

**Exercice 2.8**

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

**Exercice 2.9** (\*)

Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ , et soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose  $e_0 = 1$  et, pour  $k$  compris entre 1 et  $n$  :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des  $e_k$  :

$$e_0 = 1, \quad e_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad e_2 = (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n) + (z_2 z_3 + \dots + z_2 z_n) + \dots + (z_{n-1} z_n),$$

$$e_{n-1} = z_2 \cdots z_n + z_1 z_3 \cdots z_n + \dots + z_1 \cdots z_{n-1}, \quad e_n = z_1 z_2 \cdots z_n.$$

1. Pour  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ), écrire explicitement  $e_1, e_2$  (resp.  $e_1, e_2, e_3$ ) et montrer que

$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - e_1 X + e_2 \quad (\text{resp. } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - e_1 X^2 + e_2 X - e_3).$$

2. Pour  $n$  quelconque, montrer que l'on a :

$$\prod_{j=1}^n (X - z_j) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k X^{n-k}.$$

3. Sachant que  $2i$  et  $3-i$  sont des racines de  $X^3 + (i+1)X^2 - (8+4i)X - 4 + 28i$ , calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.
4. Pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , déterminer sans calcul  $\sum_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi i j/n}$  et  $\sum_{1 \leq j < k \leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$ .

**Exercice 2.10**

Soit  $P(X) = X^4 + 12X - 5$ . Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans  $\mathbf{R}[X]$ , en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

**Exercice 2.11**

Quels sont les polynômes  $P \in \mathbf{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$  ?

**Exercice 2.12** (\*)

1. Factoriser le polynôme  $X^2 - X + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .

**Exercice 2.13** (\*)

Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  défini par  $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + i$ .

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé  $P'$ .
2. Montrer que  $P$  n'admet aucune racine réelle.
3. Dédire des questions précédentes que  $P$  admet 3 racines distinctes dans  $\mathbf{C}$ , notées  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .
4. Calculer  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  et  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ .

**Exercice 2.14**

Factoriser le polynôme  $2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$ , sachant qu'il a une racine réelle.

**Exercice 2.15**

Soit  $P(X) = (X + 1)^n - e^{2ina}$  (où  $n \in \mathbf{N}$  et  $a \in \mathbf{R}^*$ ) Factoriser  $P$  dans  $\mathbf{C}[X]$

(Indication : il pourra être utile d'utiliser, en le justifiant, que pour  $\alpha \in \mathbf{R}$  on a  $1 - e^{i\alpha} = 2ie^{i\alpha/2} \sin(\alpha/2)$ ).

En déduire la valeur de  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ . Combien vaut  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$  ?

**Exercice 2.16**

On note  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $\alpha_5$  les racines du polynôme  $P(X) = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$ . Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont  $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$  et  $1/\alpha_5$ .

---

**Feuille d'exercices n° 10 TER**  
POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

---

**Exercice 3.1**

Déterminer le PGCD unitaire de  $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  et de  $X^4 - 1$ , considérés comme éléments de  $\mathbf{Q}[X]$ .

**Exercice 3.2**

Déterminer tous les polynômes de degré 3, divisibles par  $X - 1$ , et tels que les restes des divisions euclidiennes par  $X - 2$ , par  $X - 3$  et par  $X - 4$  soient égaux (mais certainement non nuls).

**Exercice 3.3**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , et considérons le polynôme à coefficients réels  $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$ . Peut-on choisir  $a, b, c$  pour que  $P$  admette 1 comme racine multiple? Quel est alors l'ordre de cette racine?

**Exercice 3.4**

Factoriser  $X^6 + X^3 + 1$  sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 3.5**

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda, \mu$  pour que  $X^2 + 1$  divise  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ .

**Exercice 3.6**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que les polynômes  $1 + X + \dots + \frac{X^n}{n!}$  et  $1 + X + X^n$  n'ont que des racines simples dans  $\mathbf{C}$ .

**Exercice 3.7**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Factoriser le polynôme  $1 - X + \frac{X(X-1)}{2} + \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ .

**Exercice 3.8**

Dans cet exercice, on cherche à déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbf{R}[X]$  tels que  $P(0) = 0$  et  $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$ . Soit  $P$  un tel polynôme.

1. On définit une suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$ , et  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que  $P(u_n) = u_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
2. En déduire la valeur de  $P$ .

**Exercice 3.9**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Factoriser dans  $\mathbf{C}[X]$  le polynôme  $(X+1)^n - (X-1)^n$ .

**Exercice 3.10**

1. Soient  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  quatre entiers. Trouver deux entiers  $q_1$  et  $q_2$  tels que  $(p_1^2 + p_2^2)(p_3^2 + p_4^2) = q_1^2 + q_2^2$ .  
**Indication** : manipuler les nombres complexes  $p_1 + ip_2$  et  $p_3 + ip_4$ .
2. Soient  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  quatre polynômes de  $\mathbf{R}[X]$ . En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels  $Q_1, Q_2$  tels que  $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$ .
3. Soit  $P \in \mathbf{R}[X]$ . Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
  - (a) Pour tout réel  $x$ , on a  $P(x) \geq 0$ .
  - (b) Il existe  $Q_1, Q_2$  dans  $\mathbf{R}[X]$  tels que  $P = Q_1^2 + Q_2^2$ .