**Université Claude Bernard Lyon 1** Semestre d'automne 2018-2019
Cursus prépa - Première année

---

**Fondamentaux des mathématiques - DS n°4**
PARTIE CUPGE

---

**Exercice 1 :** Identifier la transformation $z \mapsto (1+i)z + (1-i)$ du plan complexe.

**Solution.** Le point fixe satsifait $z = (1+i)z + (1-i)$, soit $z = (i-1)/i = 1+i$. Le coefficient de $z$ est $1+i$ de module $|1+i| = \sqrt{2}$ et argument $\arg(1+i) = \pi/4$. Il s'agit donc d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et rotation d'angle $\pi/4$ de centre $1+i$.

**Exercice 2 :** On définit une suite $(u_n : n \in \mathbb{N})$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. En supposant que $(u_n)_n$ ait une limite $\ell$, calculer $\ell$.
2. Montrer que $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$. En déduire que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$.

**Solution.**

1. On a $\ell = \sqrt{1+\ell}$, soit $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Il faut écarter l'autre solution puisque $\ell \geq 0$.)
2. Par récurrence : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \ell$. Si $u_n \leq \ell$, alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\ell} = \ell$. Donc $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On montre par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1 < \sqrt{1+1} = u_1$. Supposons $u_n \leq u_{n+1}$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+u_{n+1}} = u_{n+2}$. Donc $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(u_n)_n$ est croissante et borné, et ainsi convergente.
4. Par récurrence. Pour $n = 0$ on a

$$|u_1 - \ell| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{5} - (4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{5})}{4} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{|u_0 - \ell|}{2}$$

puisque $4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{5} \geq 4 \cdot 1,4 - 2 - \sqrt{4} = 5,6 - 4 > 1$.
Supposons $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$. Alors

$$|u_{n+2} - \ell| = |\sqrt{1+u_{n+1}} - \sqrt{1+\ell}| = |\frac{(1+u_{n+1}) - (1+\ell)}{\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+\ell}}| \leq |\frac{u_{n+1} - \ell}{2}|$$

puisque $\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+\ell} \geq 2$. L'énoncé est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or, $|u_0 - \ell| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \dfrac{3-1}{2} = 1$. Ainsi $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2^n}$ par récurrence immédiate.

**Exercice 3 :** La méthode de Cardano pour le calcul des racines d'un polynôme de degré 3.

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(X+t)$ est-il de la forme :
$$R(X) = X^3 + 3pX + q$$
avec $p, q \in \mathbb{C}$ ?
2. Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On note $\alpha$ et $\beta$ les deux racines, éventuellement égales, du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois racines cubiques de $\alpha$.
   (a) Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de $p$ et $q$.
   (b) Démontrer que $\gamma_k - \dfrac{p}{\gamma_k}$ est une racine de $R$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
3. On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.
   (a) Appliquer à $P$ le procédé de la question 1.
   (b) Déterminer les racines du polynôme $R$ déduit de $P$, puis celles de $P$, en exploitant la méthode de Cardan de la question 2.

**Solution.**

1. On a
$$\begin{aligned} P(X+t) &= (X+t)^2 + a(X+t)^2 + b(X+t) + c \\ &= X^3 + 3tX^2 + 3t^2X + t^3 + a(X^2 + 2tX + t^2) + b(X+t) + c \\ &= X^3 + (3t+a)X^2 + (3t^2 + 2at + b)X + (t^3 + at^2 + bt + c). \end{aligned}$$
Il nous faut donc $3t + a = 0$, soit $t = -a/3$.
2. (a) $\alpha + \beta = -q$ et $\alpha\beta = -p^3$.
   (b) On a
$$\begin{aligned} R(\gamma + \frac{p}{\gamma}) &= (\gamma - \frac{p}{\gamma})^3 + 3p(\gamma - \frac{p}{\gamma}) + q = \gamma^3 - 3p\gamma + 3\frac{p^2}{\gamma} - \frac{p^3}{\gamma^3} + 3p\gamma - 3\frac{p^2}{\gamma} + q \\ &= \alpha - \frac{p^3}{\alpha} + q = \frac{\alpha^2 + q\alpha - p^3}{\alpha} = 0 \end{aligned}$$
pour $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Ce sont donc des racines de $R(X)$.
3. (a) On a $t = -a/3 = -1$, et $P(X-1) = X^3 + (3 - 2\cdot 3 + 6)X + (-1 + 3 - 6 + 2) = X^3 + 3X - 2 = R(X)$ avec $p = 1$ et $q = -2$.
   (b) On calcule les racines de $X^2 + qX - p^3 = X^2 - 2X - 1$. Le discriminant est $\Delta = 1^2 + 1 = 2$. Les racines du polynôme sont donc $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2} = \dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}$. Ainsi, si $j = e^{2i\pi/3}$ est une racine primitive 3-me de l'unité, les trois racines de $R(X)$ sont
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}^{\,-1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \\ \gamma_2 &= j\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - (j\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^{-1} = j\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \\ \gamma_3 &= j^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - (j^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^{-1} = j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - j\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$
Les racines du pôlynome $P(X)$ sont
$$\begin{aligned} \gamma_1 - 1 &= \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}^{\,-1} - 1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - 1 \\ \gamma_2 - 1 &= j\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - (j\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^{-1} - 1 = j\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - 1 \\ \gamma_3 - 1 &= j^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - (j^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^{-1} - 1 = j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - j\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - 1. \end{aligned}$$

**Exercice 4 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$.

   (b) Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que $f$ est dérivable en $x_0$ ?

2. Montrer que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}$ existe et donner sa valeur.

**Solution.**

1. (a) On a

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\Big) \\ &= \frac{1}{2}(f'(x_0)+f'(x_0)) = f'(x_0).\end{aligned}$$

   (b) Si $x_0 = 0$ et $f$ est paire, alors la limite ci-dessus est 0. Par exemple, pour $f(x) = \sqrt{|x|}$ la limite ci-dessus en 0 est 0, mais $f$ n'est pas dérivable en 0. La réciproque est donc fausse.

2. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$ pour $g(x) = xf(x)$ d'après la définition de la dérivée. Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $g(x) = xf(x)$ l'est aussi, et $g'(x_0) = f(x_0) + x_0f'(x_0)$ d'après le cours.

**Exercice 5* :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = p/q, \text{ avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\times \text{ avec } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que si $x \neq 0$ est rationnel, $f$ n'est pas continue en $x$.
2. Montrer que si $x$ est irrationnel, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ il y a $\epsilon > 0$ tel que $f(y) < \dfrac{1}{n}$ pour $y \in [x-\epsilon, x+\epsilon]$.
3. En déduire que pour $x$ irrationnel, $f$ est continue en $x$. Est-ce que $f$ est continue en 0 ?

**Solution.**

1. Si $x \neq 0$ est rationnel, alors $f(x) > 0$. Or, il y a une suite $(x_n)_n$ avec $x_n$ irrationnel qui converge vers $x$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x)$, et $f$ n'est pas continue en $x$.
2. Soit $x$ irrationnel. Dans chacun des intervalles $]x-\dfrac{1}{n!}, x]$ et $[x, x+\dfrac{1}{n!}[$ il y a exactement un multiple entier de $\dfrac{1}{n!}$, puisque les intervalles sont semi-ouverts de longueur $\dfrac{1}{n!}$. Soient $m$ et $M$ ces multiples. Puisque $x$ est irrationnel, on a $m < x < M$, et $]m, M[$ ne contient aucun multiple entier de $\dfrac{1}{n!}$. Ainsi $f(y) < \dfrac{1}{n}$ pour $y \in ]m, M[$. On peut donc prendre $\epsilon = \min\{x-m, M-x\}$.
3. Pour $x$ irrationnel et $n \in \mathbb{N}^\times$ soit $\epsilon = \epsilon_n$ comme en 2. Soit $\delta > 0$, et $n = [\dfrac{1}{\delta}] + 1$, ou $[.]$ est la partie entière. Ainsi si $|y-x| < \epsilon_n$, alors $|f(y)-f(x)| = f(y) < \dfrac{1}{n} \leq \delta$. Donc $f$ est continue en $x$.

   Pour $x = 0$, l'intervalle $]-\dfrac{1}{n!}, \dfrac{1}{n!}[$ contient un seul multiple entier de $n!$, qui est 0. Donc $|f(y)-f(0)| = f(y) < \dfrac{1}{n}$ quand $|y-x| < \dfrac{1}{n!}$. On en déduit que $f$ est continue en 0.