Fondamentaux des mathématiques - DS n°4

Partie CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 : Identifier la transformation $z \mapsto (1+i)z + (1-i)$ du plan complexe.

Exercice 2 : On définit une suite $(u_n : n \in \mathbb{N})$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. En supposant que $(u_n)_n$ ait une limite ℓ, calculer ℓ.
2. Montrer que $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2} |u_n - \ell|$. En déduire que $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Exercice 3 : La méthode de Cardano pour le calcul des racines d'un polynôme de degré 3.

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(X+t)$ est-il de la forme :
$$R(X) = X^3 + 3pX + q$$
avec $p, q \in \mathbb{C}$?
2. Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On note α et β les deux racines, éventuellement égales, du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois racines cubiques de α.
   (a) Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de p et q.
   (b) Démontrer que $\gamma_k - \dfrac{p}{\gamma_k}$ est une racine de R pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
3. On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.
   (a) Appliquer à P le procédé de la question 1.
   (b) Déterminer les racines du polynôme R déduit de P, puis celles de P, en exploitant la méthode de Cardan de la question 2.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$.
   (b) Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0 ?
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0}$ existe et donner sa valeur.

Exercice 5* : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = p/q, \text{ avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\times \text{ avec } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que si $x \neq 0$ est rationnel, f n'est pas continue en x.
2. Montrer que si x est irrationnel, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ il y a $\epsilon > 0$ tel que $f(y) < \dfrac{1}{n}$ pour $y \in [x - \epsilon, x + \epsilon]$.
3. En déduire que pour x irrationnel, f est continue en x. Est-ce que f est continue en 0 ?