Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2018 - 2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°4
Partie commune - Corrigé

Exercice 1 — 1. Cherchons tout d'abord une solution particulière $n_0 \in \mathbf{Z}$ de ce système de congruences. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{10} \end{cases} \Leftrightarrow \exists k, k' \in \mathbf{Z},\ n = 2 + 17k = 3 + 10k'$$
$$\Leftrightarrow \exists k, k' \in \mathbf{Z},\ n = 2 + 17k \text{ et } 17k - 10k' = 1.$$

On obtient aisément une relation de Bézout entre 10 et 17 :

$$17 \times 3 - 10 \times 5 = 1$$

donc nous pouvons prendre $n_0 = 2 + 17 \times 3 = 53$.

Explicitons maintenant toutes les solutions du système de congruences. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{10} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{17} \\ n \equiv n_0 \pmod{10} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n - n_0 \equiv 0 \pmod{17} \\ n - n_0 \equiv 0 \pmod{10} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow 10 | n - n_0 \text{ et } 17 | n - n_0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{ppcm}(10, 17) | n - n_0 \\
&\Leftrightarrow 170 | n - n_0 \\
&\Leftrightarrow n \equiv n_0 \pmod{170}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système de congruences est donc

$$\{n \in \mathbf{Z} \mid n \equiv 53 \pmod{170}\}.$$

2. Puisque $223 \equiv 2 \pmod{17}$ et $223 \equiv 3 \pmod{10}$, nous avons

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \quad 223^{k_1} \equiv 2^{k_1} \pmod{17} \text{ et } 223^{k_2} \equiv 3^{k_2} \pmod{10}.$$

Le calcul successif des puissances de 2 (resp. 3) modulo 17 (resp. modulo 10) fournit

$$2^4 \equiv -1 \pmod{17}, \quad \text{donc } 2^8 \equiv 1 \pmod{17}$$

et

$$3^2 \equiv -1 \pmod{10}, \quad \text{donc } 3^4 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Nous pouvons donc choisir

$$k_1 = 8 \quad \text{et} \quad k_2 = 4.$$

3. En écrivant $225 = 1 + 8 \times 28$, nous obtenons

$$223^{225} \equiv 2^{225} \equiv 2 \times (2^8)^{28} \equiv 2 \pmod{17} \quad \text{et} \quad 223^{225} \equiv 3^{225} \equiv 3 \times (3^4)^{56} \equiv 3 \pmod{10}.$$

Le reste de la division euclidienne de 223^{225} par 17 (resp. par 10) est donc égal à 2 (resp. à 3).

Les deux dernières congruences signifient que 223^{225} est une solution du système considéré à la question 1. Nous en déduisons

$$223^{225} \equiv 53 \ (\mathrm{mod}\ 170)$$

et le reste de la division euclidienne de 223^{225} par 170 est donc 53.

Exercice 2 — 1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = x \Leftrightarrow 7x^2 - 3 = 2x(x^2+1) \Leftrightarrow 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Cette équation admet 1 pour racine évidente et

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x-1)(2x^2 - 5x - 3) = (x-1)(x-3)(2x+1),$$

donc les deux autres racines sont $-1/2$ et 3. L'ensemble des points fixes de f est ainsi

$$\left\{-\frac{1}{2}, 1, 3\right\}.$$

2. Étudions les variations de f sur $[1,3]$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}.$$

Puisque $f' > 0$ sur $[1,3]$, la fonction f est strictement croissante sur ce segment ; par suite,

$$\forall x \in [1,3], \quad 1 = f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(3) = 3$$

et le segment $[1,3]$ est donc stable par f.

3. Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n. Puisque $u_0 = \sqrt{2} \in [1,3]$, cet encadrement est vérifié pour $n = 0$. Supposons qu'il soit établi pour un certain entier $n \in \mathbf{N}$; alors

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([1,3]) \subset [1,3]$$

en vertu de la question précédente, donc cet encadrement est valable pour $n+1$. Par application du principe de récurrence, nous avons donc démontré l'assertion :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) - x = -\frac{2x^3 - 7x + 2x + 3}{x^2+1} = -\frac{(x-3)(x-1)(2x+1)}{x^2+1}.$$

En étudiant le signe de chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur, on obtient $f(x) - x \geqslant 0$ pour tout $x \in [1,3]$. Puisque $u_n \in [1,3]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$$

et la suite (u_n) est donc croissante.

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle est convergente. Sa limite ℓ vérifie les conditions
$$\ell \geqslant u_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \ell = f(\ell)$$
par continuité de f, donc $\ell = 3$ d'après la question 1.

Exercice 3 — 1. Pour tout $(r,t) \in \mathbf{R}^2$,
$$|\varphi(r,t)| = |e^r e^{it}| = |e^r| \cdot |e^{it}| = e^r > 0$$
donc l'image de φ est contenue dans $\mathbf{C}^\times$. Réciproquement, tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous forme trigonométrique
$$z = |z|e^{i\theta} = e^{\ln|z|}e^{i\theta} = \varphi(\ln|z|, \theta),$$
où $\theta \in \mathbf{R}$ est une détermination de l'argument de z, et donc appartient à l'image de φ. Au final, nous obtenons
$$\mathrm{im}(\varphi) = \mathbf{C}^\times.$$

2. L'application φ n'est pas injective car
$$\varphi(0,0) = 1 = \varphi(0, 2\pi).$$

3. Pour tout $(r,t) \in \mathbf{R}^2$,
$$\begin{aligned}\varphi(r,t) = \frac{1}{1+i} \Leftrightarrow e^r e^{it} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} e^r & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e^{it} & \equiv & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad r = -\frac{1}{2}\ln 2 \ \text{ et } \ t \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}\end{aligned}$$
donc
$$\varphi^{-1}(A) = \left\{\left(-\frac{1}{2}\ln 2, t\right) \mid \exists k \in \mathbf{Z}, \quad t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}.$$
Pour tout $(r,t) \in \mathbf{R}^2$,
$$\varphi(r,t) \in \mathbf{iR} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(e^r e^{it}) = 0 \Leftrightarrow e^r \cos(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$
donc
$$\varphi^{-1}(B) = \left\{(r,t) \mid \exists k \in \mathbf{Z}, \quad t = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}.$$

Exercice 4 — 1. Pour tous $z_1 \in \mathbf{U}_a$ et $z_2 \in \mathbf{U}_b$,
$$(z_1 z_2)^{ab} = z_1^{ab} z_2^{ab} = (z_1^a)^b (z_2^b)^a = 1,$$
donc $z_1 z_2 \in \mathbf{U}_{ab}$.

2. (i) Puisque a et b sont premiers entre eux, $\text{pgcd}(a,b) = 1$ et l'on peut donc écrire une identité de Bézout
$$1 = av + bu$$
avec $u, v \in \mathbf{Z}$. En divisant cette égalité par ab, nous obtenons
$$\frac{1}{ab} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}.$$
(ii) Avec les notations de la question précédente, posons
$$z_1 = e^{\frac{2i\pi u}{a}} \in \mathbf{U}_a \quad \text{et} \quad z_2 = e^{\frac{2i\pi u}{b}}.$$
Nous avons $z_1 \in \mathbf{U}_a$, $z_2 \in \mathbf{U}_b$ et
$$\mu(z_1, z_2) = z_1 z_2 = e^{\frac{2i\pi u}{a}} e^{\frac{2i\pi v}{b}} = e^{\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)2i\pi} = e^{\frac{2i\pi}{ab}}.$$
Ainsi, l'image de μ contient le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{ab}}$.
(iii) Tous les éléments de $\mathbf{U}_{ab}$ s'écrivent sous la forme $e^{\frac{2i\pi k}{ab}}$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
Pour tout $k \in \mathbf{Z}$,
$$\frac{k}{ab} = \frac{ku}{a} + \frac{kv}{b}$$
et donc
$$e^{\frac{2i\pi k}{ab}} = e^{\left(\frac{2i\pi ku}{a}+\frac{2i\pi kv}{b}\right)} = e^{\frac{2i\pi ku}{a}} e^{\frac{2i\pi kv}{b}} = \mu\left(e^{\frac{2i\pi ku}{a}}, e^{\frac{2i\pi kv}{b}}\right),$$
ce qui prouve que l'image de μ est égale à $\mathbf{U}_{ab}$.
3. On a $\text{Card}(\mathbf{U}_n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, donc
$$\text{Card}(\mathbf{U}_{ab}) = ab$$
et
$$\text{Card}(\mathbf{U}_a \times \mathbf{U}_b) = \text{Card}(\mathbf{U}_a) \times \text{Card}(\mathbf{U}_b) = ab$$
pour tous $a, b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.
4. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) a été démontrée à la question 2(ii). Comme $\mathbf{U}_a \times \mathbf{U}_b$ et $\mathbf{U}_{ab}$ sont deux ensembles finis de même cardinal d'après la question 3, l'application μ est bijective si et seulement si elle est surjective ; cela fournit donc l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons finalement que μ soit bijective. Il existe alors $z_1 \in \mathbf{U}_a$ et $z_2 \in \mathbf{U}_b$ tels que $\mu(z_1 z_2) = e^{\frac{2i\pi}{ab}}$. Choisissons des entiers $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ tels que
$$z_1 = e^{\frac{2i\pi k_1}{a}} \text{ et } z_2 = e^{\frac{2i\pi k_2}{b}}.$$
Il vient
$$e^{\frac{2i\pi}{ab}} = \mu(z_1, z_2) = z_1 z_2 = e^{\frac{2i\pi k_1}{a}} e^{\frac{2i\pi k_2}{b}} = e^{\left(\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{b}\right)2i\pi}$$
donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que
$$\frac{2i\pi}{ab} = \frac{2i\pi k_1}{a} + \frac{2i\pi k_2}{b} + 2ik\pi.$$
En multipliant cette identité par $\frac{ab}{2i\pi}$, on en déduit
$$1 = k_1 b + k_2 a + kab = ak_2 + b(k_1 + ak).$$
Comme k_2 et $k_1 + ak$ sont des nombres entiers, cette identité implique $\text{pgcd}(a,b) = 1$. Nous venons d'établir l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i), et ceci achève la preuve de l'équivalence des trois assertions.