Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2018 - 2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°4
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

***Durée :** 1h30. Les calculatrices ne sont **pas autorisées**.*

Questions de cours

1. Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ et $a \in \mathbf{Q}$. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $X - a$ divise P dans $\mathbf{Q}[X]$;
   (ii) $P(a) = 0$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) > 0$. Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que $f_{|I} > 0$.

Exercice 1 —

1. Déterminer l'ensemble des solutions $n \in \mathbf{Z}$ du système
$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$$
2. Déterminer des nombres entiers $k_1, k_2 \geqslant 1$ tels que
$$223^{k_1} \equiv 1 \pmod{17} \quad \text{et} \quad 223^{k_2} \equiv 1 \pmod{10}.$$
3. Calculer le reste de la division euclidienne de 223^{225} par 17, par 10 et par 170.

Exercice 2 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{7u_n^2 - 3}{2(u_n^2+1)}. \end{cases}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{7x^2-3}{2(x^2+1)}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer les points fixes de f.
2. Démontrer que le segment $[1, 3]$ est stable par f.
3. Démontrer que l'on a $1 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3 — Considérons l'application

$$\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \quad (r,t) \mapsto e^r e^{it}.$$

1. Déterminer l'image de φ.
2. L'application φ est-elle injective ?
3. Posons $A = \left\{\frac{1}{1+i}\right\}$ et $B = i\mathbf{R}$. Déterminer $\varphi^{-1}(A)$ et $\varphi^{-1}(B)$.

Exercice 4 — Pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, posons

$$\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}.$$

Considérons deux nombres entiers $a, b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

1. Démontrer que si $z_1 \in \mathbf{U}_a$ et $z_2 \in \mathbf{U}_b$, alors $z_1 z_2 \in \mathbf{U}_{ab}$.

On note μ l'application

$$\mathbf{U}_a \times \mathbf{U}_b \to \mathbf{U}_{ab}, \quad (z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2.$$

2. Supposons que les nombres entiers a et b soient premiers entre eux.
   (i) Démontrer qu'il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que
   $$\frac{1}{ab} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}.$$
   (ii) En déduire que l'image de μ contient $e^{\frac{2i\pi}{ab}}$.
   (iii) Démontrer que l'application μ est surjective.
3. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathbf{U}_a \times \mathbf{U}_b)$ et $\mathrm{Card}(\mathbf{U}_{ab})$.
4. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) a et b sont premiers entre eux ;
   (ii) l'application μ est surjective ;
   (iii) l'application μ est bijective.