Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
Partie CUPGE

Exercice 1 : On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Écrire z_3 sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution.

1. On a $[z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Soit $\arg z_1 = \phi_1$ et $\arg z_2 = \phi_2$. Alors $\sin\phi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\phi_1 = \frac{1}{2}$, d'où $\phi_1 = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$, et $\sin\phi_2 = \cos\phi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\phi_2 = \frac{\pi}{4} \mod 2\pi$. Ainsi $z_1 = 2\cos\frac{\pi}{3} + i2\sin\frac{\pi}{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i}(\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$, et
$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)}{1_i^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.
3. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Exercice 2 : Pour un entier $n > 0$ calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{e^{i(x+ky)} + e^{-i(x+ky)}}{2} = \frac{e^{ix}}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{iy})^k + \frac{e^{-ix}}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{-iy})^k \\
&= \frac{e^{ix}}{2}(1 + e^{iy})^n + \frac{e^{-ix}}{2}(1 + e^{-iy})^n \\
&= \frac{e^{ix}}{2} e^{iny/2}(e^{-iy/2} + e^{iy/2})^n + \frac{e^{-ix}}{2} e^{-iny/2}(e^{iy/2} + e^{-iy/2})^n \\
&= \frac{e^{i(x+ny/2)} + e^{-i(x+ny/2)}}{2}\, 2^n \cos^n\frac{y}{2} = 2^n \cos(x + \frac{ny}{2}) \cos^n\frac{y}{2}.
\end{aligned}$$

Alternative :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky) &= \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\cos(x + ky) + i\sin(x + ky)]) = \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} e^{i(x+ky)}) \\
&= \mathrm{Re}(e^{ix} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{iy})^k) = \mathrm{Re}(e^{ix}(1 + e^{iy})^n) = \mathrm{Re}(e^{ix} e^{iny/2}(e^{-iy/2} + e^{iy/2})^n) \\
&= \mathrm{Re}(e^{i(x+ny/2)}\, 2^n \cos^n\frac{y}{2}) = 2^n \cos(x + \frac{ny}{2}) \cos^n\frac{y}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Résoudre l'équation du second degré suivante :

$$z^2-(7+i)z+12+3i=0.$$

Solution. On a $\Delta=(7+i)^2-4(12+3i)=49-1+14i-48-12i=2i=2e^{i\pi/2}$. Les racines carrées de Δ sont donc $\delta_1=2e^{i\pi/4}=1+i$ et $\delta_2=-1-i$. Ainsi les solutions de l'équation sont

$$z_1=\frac{7+i+1+i}{2}=4+i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{7+i-(1+i)}{2}=3.$$

Alternative pour le calcul des racines carrées : On pose $(a+ib)^2=\Delta$ pour $a,b\in\mathbb{R}$. Alors

$$a^2-b^2=\mathrm{Re}(\Delta)=0, \qquad 2ab=\mathrm{Im}(\Delta)=2 \qquad \text{et} \qquad a^2+b^2=|\Delta|=2.$$

Ainsi $2a^2=2b^2=2$. Donc $a=\pm1$ et $b=\dfrac{1}{a}=\pm1$ aussi (de même signe). Alors $\delta=\pm(1+i)$.

Exercice 4 : Pour les transformations suivantes du plan complexe, trouver les points fixes et identifier la transformation :

$$(a) \quad z\mapsto 3z+(2+i) \qquad\qquad (b) \quad z\mapsto \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i).$$

Solution.

1. On calcule le point fixe. $z=3z+(2+i)$ donne $z=-1-i/2$. Le coefficient de z est 3, ce qui est réel. Il s'agit donc d'une homothétie de centre $-1-i/2$ et rapport 3.
2. On calcule le point fixe. $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$ donne $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$ et $z=\dfrac{\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}(1-i)=\dfrac{\sqrt{3}+i3}{1+3}(1-i)=\dfrac{3+\sqrt{3}+i(3-\sqrt{3})}{4}$. Le coefficient de z est $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\pi/3}$. Il s'agit donc d'une rotation de centre $\dfrac{3+\sqrt{3}+i(3-\sqrt{3})}{4}$ et d'angle $\pi/3$.

Exercice 5 : Pour $n\geq1$, on note $H_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$.

1. Vérifier que la dérivée de la fonction argument sinus hyperbolique est $(\operatorname{argsh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. Démontrer que, pour tout $n\geq0$ on a $\operatorname{argsh}(n)\leq\operatorname{argsh}(n+1)\leq H_n\leq 1+\operatorname{argsh}(n)$.
3. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\operatorname{argsh}(n)}$.
4. On pose $v_n=H_n-\operatorname{argsh}(n+1)$ pour $n\geq0$. Vérifier que $v_n-v_{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}-[\operatorname{argsh}(n+1)-\operatorname{argsh}(n)]$.

On admet le **Théorème des accroissements finis** suivant :
Si f est dérivable sur $[a,b]$, alors il y a $c\in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

5. Étudier la monotonie de $(v_n:n\geq1)$. En déduire que $(v_n:n\geq0)$ est convergente.

Solution.

1. D'après le cours, $\operatorname{argsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Ainsi

$$(\operatorname{argsh} x)'=(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Alternative : $\operatorname{argsh}'x=\dfrac{1}{(\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh} x)}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)}=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x)+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

2. Pour $n=0$ on a $\operatorname{argsh}(0)=0$ et $H_0=1\leq 1+\operatorname{argsh}(0)$. De plus, comme sh est croissant, argsh aussi, d'où $\operatorname{argsh}(n)\leq \operatorname{argsh}(n+1)$ pour tout n. Or, si $[x]$ dénote la partie entière de x, alors $[x]\leq x\leq [x+1]$. Ainsi pour $n\geq 1$ on a

$$\begin{aligned} H_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &= \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{[x]^2+1}} \geq \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh}(n)-\operatorname{argsh}(0) \\ &= \operatorname{argsh}(n) \geq \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{[x+1]^2+1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = H_n-1. \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{argsh}(n+1)\leq H_n\leq 1+\operatorname{argsh}(n)$.

3. On a $1\leq \dfrac{H_n}{\operatorname{argsh}(n)}\leq 1+\dfrac{1}{\operatorname{argsh}(n)}$. Comme $\operatorname{argsh}(x)$ est croissant et non borné, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\operatorname{argsh}(n)})=1$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{H_n}{\operatorname{argsh}(n)}=1$.

4. $$\begin{aligned} v_n-v_{n-1} &= (H_n-\operatorname{argsh}(n+1)-(H_{n-1}-\operatorname{argsh}(n)) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}-[\operatorname{argsh}(n+1)-\operatorname{argsh}(n)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-[\operatorname{argsh}(n+1)-\operatorname{argsh}(n)]. \end{aligned}$$

5. Puisque argsh est dérivable sur $[n,n+1]$, d'après les Théorème des accroissements finis il y a $c\in]n,n+1[$ avec
$$\operatorname{argsh}(n+1)-\operatorname{argsh}(n) = \frac{\operatorname{argsh}(n+1)-\operatorname{argsh}(n)}{(n+1)-n} = \operatorname{argsh}'(c) = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}.$$
Puisque $n<c$ on a $v_n-v_{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{c^2+1}}>0$. La suite $(v_n)_n$ est donc croissante. Or, $v_n=H_n-\operatorname{argsh}(n+1)\leq H_n-\operatorname{argsh}(n)\leq n$. La suite $(v_n)_n$ est ainsi bornée, et convergente.