Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
PARTIE CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra pour- suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 : On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Écrire z_3 sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2 : Pour un entier $n > 0$ calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

Exercice 3 : Résoudre l'équation du second degré suivante :

$$z^2 - (7+i)z + 12 + 3i = 0.$$

Exercice 4 : Pour les transformations suivantes du plan complexe, trouver les points fixes et identifier la transformation :

$$(a) \quad z \mapsto 3z + (2+i) \qquad\qquad (b) \quad z \mapsto \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}(1-i).$$

Exercice 5 : Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$.

1. Vérifier que la dérivée de la fonction argument sinus hyperbolique est $(\operatorname{argsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$ on a $\operatorname{argsh}(n) \leq \operatorname{argsh}(n+1) \leq H_n \leq 1 + \operatorname{argsh}(n)$.
3. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\operatorname{argsh}(n)}$.
4. On pose $v_n = H_n - \operatorname{argsh}(n+1)$ pour $n \geq 0$. Vérifier que $v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} - [\operatorname{argsh}(n+1) - \operatorname{argsh}(n)]$.

On admet le **Théorème des accroissements finis** suivant :
Si f est dérivable sur $[a, b]$, alors il y a $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

5. Étudier la monotonie de $(v_n : n \geq 1)$. En déduire que $(v_n : n \geq 0)$ est convergente.