Fondamentaux des mathématiques - DS n°3

Partie commune – Corrigé

Exercice 1 : Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$. On suppose que $|z| = 1$. On écrit $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $(x, y) \neq (1, 0)$ et $x^2 + y^2 = 1$. Il vient :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+x)+iy}{(1-x)-iy} = \frac{\Big((1+x)+iy\Big)\Big((1-x)+iy\Big)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{(1+x)(1-x) - y^2 + i(1+x)y + i(1-x)y}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2} = i\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}.$$

Donc $(1 + z)/(1 - z)$ est un imaginaire pur. Réciproquement, supposons que $(1 + z)/(1 - z)$ est un imaginaire pur. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $(1+z)/(1-z) = ia$. On a alors $1+z = ia(1-z)$ puis $z = (-1 + ia)/(1 + ia)$. Le module de z est alors donné par :

$$|z| = \frac{|-1+ia|}{|1+ia|} = \frac{1+a^2}{1+a^2} = 1.$$

Exercice 2 : Notons $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 - (2 + i)z + i$. Cherchons une racine réelle de ce polynôme. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & P(x) = 0 \\ \iff & x^3 - (1+2i)x^2 - (2+i)x + i = 0 \\ \iff & (x^3 - x^2 - 2x) + (-2x^2 - x + 1)i = 0. \end{aligned}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire de cette dernière inégalité, on en déduit que $x \in \mathbb{R}$ vérifie $P(x) = 0$ si et seulement si x est simultanément solution des deux équations suivantes :

$$x^3 - x^2 - 2x = 0, \tag{1}$$
$$-2x^2 - x + 1 = 0. \tag{2}$$

Les solutions de (1) sont 0, -1 et 2 et les solutions de (2) sont -1 et $1/2$. On en déduit que $P(-1) = 0$ (on aurait aussi pu trouver cette racine réelle directement en testant quelques valeurs...). On peut donc factoriser $P(z)$ par $z + 1$. On cherche donc des nombres complexes a, b et c tels que pour tout z dans $\mathbb{C}$ l'on ait $P(z) = (z+1)(az^2+bz+c)$. En développant le membre de droite de cette égalité et en identifiant les coefficients devant les monômes 1, z, z^2 et z^3, on trouve $a = 1$, $b = -2(1 + i)$ et $c = i$ si bien que :

$$P(z) = (z+1)(z^2 - 2(1+i)z + i).$$

Donc $P(z)=0$ si et seulement si $z=-1$ ou z est une racine du polynôme $Q(z)=z^2-2(1+i)z+i$. Trouvons les racines du polynôme $Q(z)$. Soit Δ son discriminant. On a $\Delta=4(1+i)^2-4i=4(1+2i+i^2)-4i=8i-4i=4i$. Cherchons les racines carrées complexes de Δ sous la forme $\delta=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a $|\delta|^2=|\Delta|$ et $\delta^2=\Delta$ donc les réels x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x^2-y^2=0, \\ 2xy=4. \end{cases}$$

On obtient que $(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ ou $(x,y)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Les racines carrées de Δ sont donc $\sqrt{2}(1+i)$ et $-\sqrt{2}(1+i)$. Les racines du polynôme $Q(z)$ sont donc :

$$z_1=\frac{2(1+i)-\sqrt{2}(1+i)}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+i\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2=\frac{2(1+i)+\sqrt{2}(1+i)}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}+i\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit que les solutions de $P(z)=0$ sont -1, $\frac{2-\sqrt{2}}{2}+i\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{2+\sqrt{2}}{2}+i\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3 : *Mettre de l'eau dans son vin*

1. (a) Après avoir versé la cuillère d'eau dans le verre de droite, la fraction volumique d'eau dans ce verre est
$$\frac{\text{volume de la cuillère}}{\text{volume total (verre + cuillère)}}=\frac{v}{V+v}.$$
En retirant une cuillère dans ce mélange et en la reversant dans le verre de gauche, on ne change pas la fraction volumique d'eau dans le verre de droite donc :
$$d_1=\frac{v}{V+v}.$$
(b) Après manipulation, le volume d'eau dans le verre de gauche est g_1V (par définition de g_1) et le volume d'eau dans le verre de droite est d_1V (par définition de d_1). Or on sait que le volume total d'eau dans les deux verres est toujours V. Donc $g_1V+d_1V=V$ et on en déduit que $g_1=1-d_1$.
(c) Après manipulation, le volume d'eau dans le verre de gauche est donc $g_1V=(1-d_1)V$. Dans le verre de droite il y a un volume d_1V d'eau et donc un volume $V-d_1V=(1-d_1)V$ de vin. On en déduit qu'il y a autant d'eau dans le vin que de vin dans l'eau.
2. (a) On réitère le raisonnement de la question 1. Après n itérations du processus, la fraction volumique d'eau dans le verre de droite est d_n. Ce verre contient donc un volume d_nV d'eau. A l'itération $n+1$ on prélève une cuillère dans le verre de gauche et on la verse dans le verre de droite. Cette cuillère contient un volume d'eau égal à g_nv. Ainsi, après avoir versé le contenu de la cuillère dans le verre de droite, la fraction volumique d'eau dans ce dernier est :
$$\frac{\text{volume d'eau dans la cuillère + volume d'eau dans le verre de droite}}{\text{volume total (verre + cuillère)}}=\frac{g_nv+d_nV}{V+v}.$$

En retirant une cuillère dans le verre de droite et en la versant dans le verre de gauche, on ne change pas la fraction volumique d'eau dans le verre de droite donc :

$$d_{n+1} = \frac{g_n v + d_n V}{V + v}.$$

Après l'itération $n+1$, il y a un volume $g_{n+1}V$ d'eau dans le verre de gauche (par définition de g_{n+1}) et un volume $d_{n+1}V$ d'eau dans le verre de droite (par définition de d_{n+1}). Or le volume total d'eau est toujours V. Donc $g_{n+1}V + d_{n+1}V = V$ d'où l'on déduit que $g_{n+1} = 1 - d_{n+1}$. Donc les suites (g_n) et (d_n) sont bien définies par :

$$\begin{cases} g_0 = 1, \quad d_0 = 0, \\ d_{n+1} = \dfrac{g_n v + d_n V}{V + v}, \quad g_{n+1} = 1 - d_{n+1}, \qquad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= g_{n+1} - d_{n+1} \\ &= 1 - d_{n+1} - d_{n+1} \\ &= 1 - 2d_{n+1} \\ &= 1 - 2\frac{g_n v + d_n V}{V + v} \\ &= \frac{V + v - 2g_n v - 2d_n V}{V + v} \\ &= \frac{V(1 - 2d_n) + v(1 - 2g_n)}{V + v}. \end{aligned}$$

Or, on sait que $g_n = 1 - d_n$. Donc $1 - 2d_n = g_n - d_n$ et $1 - 2g_n = d_n - g_n$. On obtient donc :

$$u_{n+1} = \frac{V(g_n - d_n) - v(g_n - d_n)}{V + v} = \frac{V - v}{V + v}(g_n - d_n) = \frac{V - v}{V + v} u_n.$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $r = (V - v)/(V + v)$.

(c) Comme $0 < v < V$ on a $r \in]0, 1[$. De plus comme $u_{n+1} = r u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = r^n u_0$ c'est-à-dire $g_n - d_n = r^n (g_0 - d_0)$. Comme $g_0 = 1$ et $d_0 = 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n - d_n = r^n$.

(d) D'après les questions 2.(a) et 2.(c), g_n et d_n sont solutions du système :

$$\begin{cases} g_n + d_n = 1, \\ g_n - d_n = r^n. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \frac{1}{2}(1 + r^n)$ et $d_n = \frac{1}{2}(1 - r^n)$.

(e) On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n > \frac{1}{2}$ et $d_n < \frac{1}{2}$. Il n'est donc pas possible d'obtenir autant d'eau que de vin dans chacun des deux verres en itérant le processus un nombre fini de fois. En revanche, en faisant tendre n vers $+\infty$ on voit que $g_n \to \frac{1}{2}$ et $d_n \to \frac{1}{2}$. Donc, “à la limite”, au bout d'une infinité d'itérations, il y a autant d'eau que de vin dans chacun des deux verres.