

---

Fondamentaux des mathématiques - DS n°3

PARTIE COMMUNE

---

*L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.*

**Durée : 1h30. Les calculatrices ne sont pas autorisées.**

**Questions de cours :**

1. Donner la définition d'une similitude directe.
2. Montrer que la composition de deux similitudes directes est une similitude directe.

**Exercice 1 :** Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $z \neq 1$ . Démontrer que :

$$|z| = 1 \quad \iff \quad \frac{1+z}{1-z} \text{ est un nombre imaginaire pur.}$$

**Exercice 2 :** Résoudre l'équation

$$z^3 - (1+2i)z^2 - (2+i)z + i = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

**Exercice 3 :** *Mettre de l'eau dans son vin*

On dispose de deux verres, l'un contenant un certain volume d'eau, et l'autre contenant le même volume du vin. On prélève une cuillère d'eau dans le verre d'eau, on la verse dans le verre de vin, et on mélange. Puis on prélève une cuillère dans ce mélange et on la verse dans le verre d'eau et on mélange à nouveau.

1. On souhaite tout d'abord répondre à la question suivante :

**Question A :** *Y a-t'il plus d'eau dans le vin ou plus de vin dans l'eau ?*

Dans la suite, on supposera qu'initialement le verre d'eau est disposé à gauche et le verre de vin à droite. On notera  $V$  le volume commun dans les deux verres et  $v$  le volume de la cuillère. On a naturellement  $0 < v < V$ . Avant toute manipulation, la fraction volumique d'eau<sup>1</sup> dans le verre de gauche est  $g_0 = 1$  et la fraction volumique d'eau dans le verre de droite est  $d_0 = 0$ .

---

1. On appelle *fraction volumique d'eau* le rapport entre le volume d'eau et le volume total de liquide dans un verre.

- (a) Montrer qu'après manipulation, la fraction volumique d'eau dans le verre de droite est

$$d_1 = \frac{v}{V + v}.$$

- (b) En raisonnant sur le volume total d'eau dans les deux verres, montrer qu'après manipulation, la fraction volumique d'eau dans le verre de gauche est :

$$g_1 = 1 - d_1.$$

- (c) Quelle réponse peut-on apporter à la **Question A** ?

2. On souhaite maintenant répondre à la question suivante :

**Question B** : *En itérant ce processus, peut-on obtenir autant d'eau que de vin dans chacun des deux verres ?*

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $g_n$  la fraction d'eau dans le verre de gauche et  $d_n$  la fraction d'eau dans le verre de droite après  $n$  itérations du processus.

- (a) Montrer que les suites  $(g_n)$  et  $(d_n)$  sont définies par :

$$\begin{cases} g_0 = 1, & d_0 = 0, \\ d_{n+1} = \frac{g_n v + d_n V}{V + v}, & g_{n+1} = 1 - d_{n+1}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

- (b) Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = g_n - d_n$  est une suite géométrique de raison  $r$  avec :

$$r = \frac{V - v}{V + v}.$$

- (c) Montrer  $r \in ]0, 1[$  et donner une expression de  $g_n - d_n$  en fonction de  $n$  et de  $r$ .
- (d) Donner les expressions de  $g_n$  et de  $d_n$  en fonction de  $n$  et  $r$ . *On pourra s'aider des réponses aux questions 2.(a) et 2.(c).*
- (e) Quelle réponse peut-on apporter à la **Question B** ?