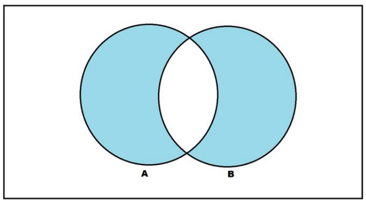
Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
Partie CUPGE

Exercice 1 : Soit X un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de X. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A \triangle B$, le sous-ensemble $A \triangle B = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\}$.

1. Interpréter les éléments de $A \triangle B$ dans un diagramme.
2. Montrer que $A \triangle B = (A \cap C_X B) \cup (B \cap C_X A)$, où $C_X A$ désigne le complémentaire de A dans X.
3. Calculer $A \triangle A$, $A \triangle \emptyset$, $A \triangle X$, $A \triangle C_X A$.
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de X on a $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Solution.

1. $A \triangle B$ est la partie bleue dans le diagramme suivant :



2. Soit $x \in A \triangle B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$; si $x \in B$; alors $x \notin A$ (car sinon $x \in A \cap B$). Puisque $x \in A$ ou $x \in B$, on a $x \in (A \cap C_X B) \cup (B \cap C_X A)$.
Inversement, soit $x \in (A \cap C_X B) \cup (B \cap C_X A)$. Donc soit $x \in A$ et $x \notin B$, or $x \in B$ et $x \notin A$. Dans les deux cas, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Ainsi $x \in A \triangle B$.
On a montré $A \triangle B \subseteq (A \cap C_X B) \cup (B \cap C_X A)$ et $(A \cap C_X B) \cup (B \cap C_X A) \subseteq A \triangle B$. On a donc égalité.
3. $A \triangle A = \{x \in A : x \notin A\} = \emptyset$ puisque $A \cup A = A \cap A = A$.
$A \triangle \emptyset = \{x \in A : x \notin \emptyset\} = A$ puisque $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.
$A \triangle X = \{x \in X : x \notin A\} = C_X A$ puisque $A \cup X = X$ et $A \cap X = A$.
$A \triangle C_X A = \{x \in X : x \notin \emptyset\} = X$ puisque $A \cup C_X A = X$ et $A \cap C_X A = \emptyset$.
4.
$$\begin{aligned}(A \triangle B) \cap C &= \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\} \cap C = \{x \in (A \cup B) \cap C : x \notin A \cap B\} \\ &= \{x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) : x \notin A \cap B\} = \{x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) : x \notin A \cap B \cap C\} \\ &= \{x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) : x \notin (A \cap C) \cap (B \cap C\} = (A \cap C) \triangle (B \cap C)\end{aligned}$$
où la troisième égalité est par distributivité, et la quatrième parce que pour $x \in C$ les conditions $x \notin A \cap B$ et $x \notin A \cap B \cap C$ sont équivalentes.

Exercice 2 : Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour toutes parties $A, B \subseteq X$ on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Solution. On a toujours $f(A \cap B) \subseteq f(A)$ et $f(A \cap B) \subseteq f(B)$, donc $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Soit f injective. Si $y \in f(A) \cap f(B)$, il y a $x \in A$ et $x' \in B$ avec $f(x) = y = f(x')$; par injectivité $x = x' \in A \cap B$. Donc $y \in f(A \cap B)$ et on a égalité.

Inversement, si f n'est pas injective, il y a $x \neq x'$ avec $f(x) = f(x') = y$. On prend $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. Alors $A \cap B = \emptyset$, et $f(A \cap B) = \emptyset \neq \{y\} = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 3 : Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ on a $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1+\ln(n)$. [Utiliser la définition de $\ln(x)$ comme intégral.]
2. En déduire la valeur de la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}$.
3. On pose $v_n = H_n - \ln(n+1)$ pour $n \geq 1$. Vérifier que $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$.
4. Étudier la monotonie de $(v_n : n \geq 1)$. En déduire que $(v_n : n \geq 1)$ est convergente.

Solution.

1. Pour $n \geq 1$ on a

$$H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{dt}{[t]} \geq \ln(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} \geq \int_1^n \frac{dt}{[t+1]} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = H_n - 1,$$

   puisque $[t] \leq t \leq [t+1]$, où $[t]$ dénote la partie entière de t. Ainsi $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1+\ln(n)$.
2. On a $1 \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$. Or, $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} + 1 = 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.
3.
$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= (H_n - \ln(n+1)) - (H_{n-1} - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}). \end{aligned}$$
4. On a $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > 0$. Avex $x = \frac{1}{n}$ on obtient $v_n \geq v_{n-1}$ et la suite est croissante. Or, $v_n = H_n - \ln(n+1) \leq H_n - \ln(n) \leq 1$ d'après 1., et la suite est bornée. D'après le théorème de la suite monotone bornée, (v_n) converge.

Exercice 4 : On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, et on considère les deux suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Démontrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. Conclure que la suite (u_n) est convergente.

Solution.

1. $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < 0$ et $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0$. Donc (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante. De plus, $v_n - w_n = \frac{1}{2n+1} \to 0^+$ pour $n \to \infty$. Ainsi (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. D'après le théorème des suites adjacentes, $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell$ (en particulier la limite existe). Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \ell$ et (u_n) est convergente.

Exercice 5 : Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.

Solution. Soit $X = e^x > 0$. Alors $\frac{X + X^{-1}}{2} = 2$, d'où $X^2 - 4X + 1 = 0$ et $X = 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} = 2 \pm \sqrt{3}$. On note que $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-3} = 2 - \sqrt{3}$. Ainsi $x = \ln(2 \pm \sqrt{3}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$.