Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
PARTIE CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra pour- suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 : Soit X un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de X. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\triangle B$, le sous-ensemble $A\triangle B = \{x \in A\cup B : x \notin A\cap B\}$.

1. Interpréter les éléments de $A\triangle B$ dans un diagramme.
2. Montrer que $A\triangle B = (A\cap C_X B)\cup(B\cap C_X A)$, où $C_X A$ désigne le complémentaire de A dans X.
3. Calculer $A\triangle A$, $A\triangle\emptyset$, $A\triangle X$, $A\triangle C_X A$.
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de X on a $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$.

Exercice 2 : Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour toutes parties $A, B \subseteq X$ on a $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

Exercice 3 : Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ on a $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1+\ln(n)$. [Utiliser la définition de $\ln(x)$ comme intégral.]
2. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}$.
3. On pose $v_n = H_n - \ln(n+1)$ pour $n \geq 1$. Vérifier que $v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \ln(1+\dfrac{1}{n})$.
4. Étudier la monotonie de $(v_n : n \geq 1)$. En déduire que $(v_n : n \geq 1)$ est convergente.

Exercice 4 : On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, et on considère les deux suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Démontrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. Conclure que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 5 : Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.