Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2018 - 2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n^o 2
Partie commune

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

***Durée :** 1h30. Les calculatrices ne sont **pas autorisées**.*

Exercice 1 : Considérons la proposition suivante :

$$(A) \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, ((\exists q \in \mathbb{N}, p = 2q) \Rightarrow (p \leq n))$$

1. Ecrire la négation de (A).
   Correction.
   $$\neg(A) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, ((\exists q \in \mathbb{N}, p = 2q) \text{ et } (p > n))$$

2. Déterminer si (A) est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
   Correction. La proposition (A) est fausse car sa négation est vraie. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. Nous allons prouver qu'il existe un nombre pair p tel que $p > n$. Si $n = 0$ alors on peut prendre $p = 2$. Si $n > 0$, alors on peut prendre $p = 2n$.

Exercice 2 : Démontrer que si n est un nombre impair positif, alors $2^n + 1$ est un multiple de 3.

Correction. Il faut démontrer que pour tout entier naturel p, le nombre $2^{2p+1} + 1$ est un multiple de 3. Nous allons démontrer ceci par récurrence sur p. Si $p = 0$ alors

$$2^{2p+1} + 1 = 2 + 1 = 3$$

est un multiple de 3. Supposons maintenant que $p \geq 1$ et que $2^{2p+1} + 1$ est un multiple de 3. Alors

$$2^{2(p+1)+1} + 1 = 2^{2p+1+2} + 1 = 4 \times 2^{2p+1} + 1 = 3 \times 2^{2p+1} + (2^{2p+1} + 1)$$

est la somme de deux multiples de 3, donc un multiple de 3.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$(1)\ \arcsin(\sin(3 + \pi)) \qquad (2)\ \sin(\arcsin(3 - \pi))$$

Correction (1). Posons $\theta = \arcsin(\sin(3 + \pi))$. Par définition θ est l'unique angle dans $[-\pi/2, \pi/2]$ tel que

$$\sin\theta = \sin(3 + \pi)$$

Puisque $3\pi/2 < 3 + \pi < 2\pi$, on a

$$\theta = (3 + \pi) - 2\pi = 3 - \pi$$

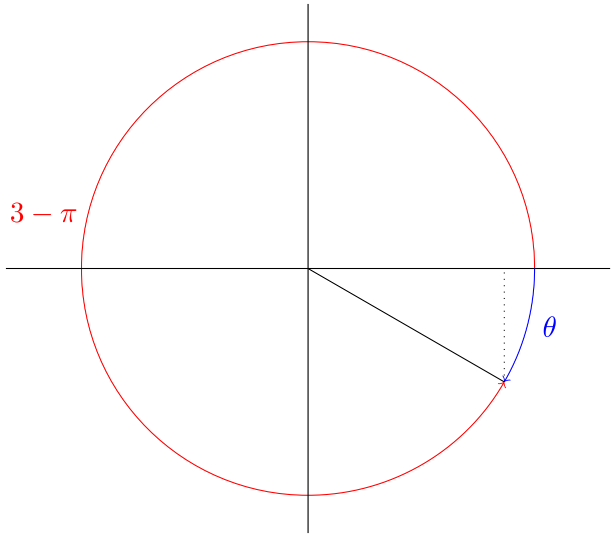

FIGURE 1 – Schema montrant les angles $3+\pi$ et θ.

Correction (2). Pour tout angle $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ nous avons $\theta = \sin(\arcsin\theta)$. Puisque $3 < \pi < 4$, on a

$$3-\pi \in [-1,0] \subset [-\pi/2, \pi/2]$$

Par conséquent

$$\sin(\arcsin(3-\pi)) = 3-\pi.$$

Exercice 4 : Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3^x - 2^x.$$

1. Déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = 0$.

   Correction.

   $$f(x) = 0 \iff 3^x = 2^x \iff x\ln 3 = x\ln 2 \iff x(\ln 3 - \ln 2) = x\ln(3/2) = 0$$

   Puisque $3/2 \neq 1$, on a $\ln(3/2) \neq 0$. Par conséquent $x = 0$.

2. Etudier le comportement de f en $\pm\infty$.

   Correction. En prenant 3^x en facteur commun on obtient

   $$f(x) = 3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

   Puisque $0 < 2/3 < 1$, on déduit

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right) = +\infty\cdot(1-0) = +\infty$$

   et

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right) = 0\cdot(1-0) = 0.$$

3. Déterminer le domaine et dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

Correction. On peut écrire

$$f(x) = e^{x\ln(3)} - e^{x\ln(2)}$$

Puisque l'exponentielle e^x et les fonctions du type $x \mapsto x\ln(a)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que la composition de fonctions dérivables est dérivable, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par la formule :

$$f'(x) = \ln 3 \cdot e^{x\ln 3} - \ln 2 \cdot e^{x\ln 2} = \ln 3 \cdot 3^x - \ln 2 \cdot 2^x$$

4. Prouver qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

   Correction. On a

$$f'(\alpha) = 0 \iff \ln 3 \cdot 3^\alpha = \ln 2 \cdot 2^\alpha \iff \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{2^\alpha}{3^\alpha} = \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha$$

$$\iff \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) = \alpha \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \iff \alpha = \frac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln(2))}{\ln 2 - \ln 3}$$

5. Prouver que $\alpha < 0$.

   Correction. Puisque ln est une fonction croissante, on a

$$\ln 3 > \ln 2 \qquad \text{et} \qquad \ln(\ln 3) > \ln(\ln(2))$$

   Par conséquent, α est le quotient d'un nombre strictement positif et d'un nombre strictement négatif, ce qui implique $\alpha < 0$.

6. Dresser le tableau de variations de f et dessiner son graphe.

   Correction.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

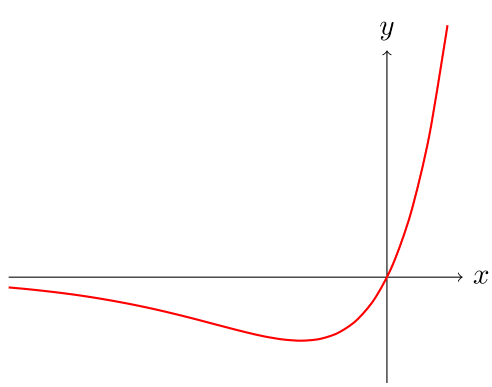

FIGURE 2 – Tableau de variations et graphe de f.