Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°1
Partie CUPGE

<u>**Exercice 1 :**</u> On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Vérifier que f est périodique de période 2π.
3. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Y a-t-il une axe de symétrie pour Γ ? Si oui, laquelle ?
4. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, puis déterminer la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$.
5. Construire Γ à l'aide des renseignements précédents.

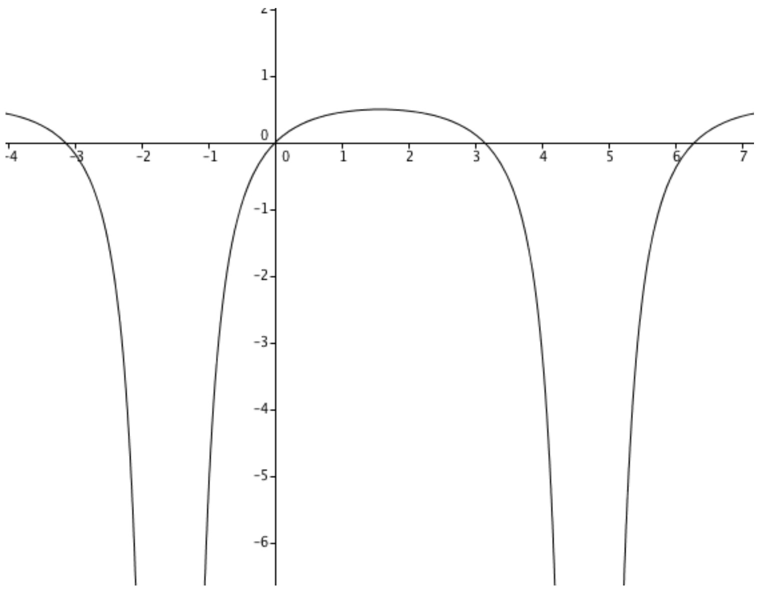
Solution.

1. Il faut $1 + \sin x \neq 0$, donc $\sin x \neq -1$, donc $x \notin \frac{3}{2}\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Le domaine est $\mathbb{R} \setminus (\frac{3}{2}\pi + 2\pi\mathbb{Z})$.
2. $\sin x$ est périodique de période2π,donc $f(x)$ aussi. Il n'y a pas de période plus courte, car les points hors domaine ont une période de 2π.
3. $f(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{1 + \sin(\pi - x)} = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x} = f(x)$. Donc f est symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{\pi}{2}$.
4. $f'(x) = \dfrac{\cos x(1 + \sin x) - \sin x \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \dfrac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$. Ainsi

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$\vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$\vert$	$+$	1	$+$	0

On a $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{1 + \sin x} = 1 - \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = -\infty.$

5. On construit d'abord Γ sur $]-\pi/2, \pi/2]$. On la déduit sur $]-\pi/2, 3\pi/2]$ par symétrie d'axe $x = \pi/2$. Enfin, on l'obtient sur $\mathbb{R}$ par périodicité de période 2π, et donc par des translations de vecteur $k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On obtient :



Exercice 2 : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) = \frac{\mathrm{ch}(nx/2)\ \mathrm{sh}((n+1)x/2))}{\mathrm{sh}(x/2)}$.

Solution. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n}(e^{x})^{k} + \sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^{k}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{(e^{x})^{n+1}-1}{e^{x}-1} + \frac{(e^{-x})^{n+1}-1}{e^{-x}-1}\Big) \qquad \text{somme géométrique}\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{(e^{x})^{n+1}-1}{e^{x/2}(e^{x/2}-e^{-x/2})} + \frac{(e^{-x})^{n+1}-1}{e^{-x/2}(e^{-x/2}-e^{x/2})}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(e^{x(n+1)}-1)e^{-x/2}-(e^{-x(n+1)}-1)e^{x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{x(n+\frac{1}{2})}-e^{-x/2}-(e^{-x(n+\frac{1}{2}}+e^{x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}.
\end{aligned}$$

D'autre coté,

$$\frac{\mathrm{ch}(nx/2)\ \mathrm{sh}((n+1)x/2))}{\mathrm{sh}(x/2)} = \frac{\frac{e^{nx/2}+e^{-nx/2}}{2}\ \frac{e^{(n+1)x/2}-e^{(n+1)x/2}}{2}}{\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{2}} = \frac{1}{2}\frac{e^{x(n+\frac{1}{2})}-e^{-x/2}-(e^{-x(n+\frac{1}{2}}+e^{x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}},$$

et on a bien égalité.

Exercice 3 : Montrer que pour toutes propositions P et Q, l'énoncé

$$\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Rightarrow P$$

est une tautologie (c'est-à-dire toujours vraie).

Solution. On construit la table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	$\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Rightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

La proposition $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Rightarrow P$ est donc toujours vraie.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes (en poussant la négation à l'intérieur des quantificateurs) :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$
2. $\forall\, M > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall\, x \geq A,\ f(x) > M.$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0).$
4. $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, (x,y) \in I^2,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \epsilon).$

Solution. Quant on pousse une négation à l'interieur d'un quantificateur, il change. De plus, la négation d'une implication $P \to Q$ est $P \wedge \neg Q$. On a donc comme négations :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$
2. $\exists\, M > 0,\ \forall\, A > 0,\ \exists\, x \geq A,\ f(x) \leq M.$
3. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \wedge x > 0).$
4. $\exists\, \epsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, (x,y) \in I^2,\ (|x-y| \leq \eta \wedge |f(x)-f(y)| > \epsilon).$

Exercice 5 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.
[Attention à l'initialisation !]

Solution. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $2^{0-1} = \dfrac{1}{2} \leq 1 = 0! \leq 1 = 0^0$.

Pour $n = 1$ on a $2^{1-1} = 1 \leq 1 = 1! \leq 1 = 1^1$.

Hérédité : On suppose $n \geq 1$, et $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$. Alors

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \leq n! \cdot (n+1) = (n+1)! \leq n^n \cdot (n+1) \leq (n+1)^n \cdot (n+1) = (n+1)^{n+1}.$$

(La première inégalité utilise $n \geq 1$.) L'énoncé est ainsi vrai pour $n+1$.

D'après le principe de récurrence, l'enoncé est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.