Fondamentaux des mathématiques - DS n°1

Partie CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra pour- suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Vérifier que f est périodique de période 2π.
3. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Y a-t-il une axe de symétrie pour Γ ? Si oui, laquelle ?
4. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, puis déterminer la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$.
5. Construire Γ à l'aide des renseignements précédents.

Exercice 2 : Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) = \frac{\mathrm{ch}(nx/2)\ \mathrm{sh}((n+1)x/2))}{\mathrm{sh}(x/2)}.$$

Exercice 3 : Montrer que pour toutes propositions P et Q, l'énoncé

$$\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Rightarrow P$$

est une tautologie (c'est-à-dire toujours vraie).

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes (en poussant la négation à l'intérieur des quantificateurs) :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$
2. $\forall\, M > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall\, x \geq A,\ f(x) > M.$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0).$
4. $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, (x, y) \in I^2,\ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon).$

Exercice 5 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.
[Attention à l'initialisation !]