Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2018 - 2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°1
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* ***pas autorisées****.*

Exercice 2 :

1. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier vos réponses.
   (a) $\forall r \in \mathbb{Q}\,,\, \exists\,(p,q) \in \mathbb{N}^2\,,\, r = \dfrac{p}{q}\,.$
   Cette assertion est fausse : prenons par exemple $r = -1 \in \mathbb{Q}$. r étant strictement négatif il ne peut s'écrire comme quotient de deux nombres positifs.
   (b) $\exists\, r \in \mathbb{Q}\,,\, \forall x \in \mathbb{R}\,,\, r + x \in \mathbb{Q}\,.$
   Cette assertion est fausse. Nous allons montrer que sa négation est vraie, à savoir : $\forall\, r \in \mathbb{Q}\,,\, \exists x \in \mathbb{R}\,,\, r + x \notin \mathbb{Q}$. Considérons donc un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ quelconque. On considère alors un nombre irrationnel x (par exemple $x = \sqrt{2}$). Alors $r + x$ est aussi irrationnel (on vérifie aisément que si $r + x \in \mathbb{Q}$, alors $x \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde). On en conclut que la négation de l'assertion (b) est vraie. En d'autres termes, (b) est fausse.
   (c) $\forall\, r \in \mathbb{Q}\,,\, \exists x \in \mathbb{R}\,,\, r + x \in \mathbb{Q}\,.$
   Cette assertion est vraie : il suffit de prendre $x = 0$.
2. Donner la négation des assertions ci-dessus.
   (a) $\exists r \in \mathbb{Q}\,,\, \forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2\,,\, r \neq \dfrac{p}{q}\,.$
   (b) $\forall\, r \in \mathbb{Q}\,,\, \exists x \in \mathbb{R}\,,\, r + x \notin \mathbb{Q}\,.$
   (c) $\exists\, r \in \mathbb{Q}\,,\, \forall x \in \mathbb{R}\,,\, r + x \notin \mathbb{Q}\,.$

Exercice 3 : *On se propose ici de retrouver la valeur de la somme des carrés d'entiers.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \quad , \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad , \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3\,.$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 = (n+1)^3 - 1\,.$
   Il s'agit d'une somme téléscopique :
   $$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 = \sum_{k=2}^{n+1}k^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 = (n+1)^3 - 1\,.$$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = S_3 + 3S_2 + 3S_1 + n$.
Indication : développer $(k+1)^3$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^3 + \sum_{k=1}^{n}3k^2 + \sum_{k=1}^{n}3k + \sum_{k=1}^{n}1 \\ &= S_3 + 3S_2 + 3S_1 + n\,.\end{aligned}$$

3. En déduire que $3S_2 + 3S_1 + n = (n+1)^3 - 1$.
D'après la question 1., $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - S_3 = (n+1)^3 - 1$. Donc, d'après ce qui précède $(S_3 + 3S_2 + 3S_1 + n) - S_3 = (n+1)^3 - 1$, d'où le résultat.

4. En utilisant l'exercice 1, en déduire la valeur de S_2.
D'après la question précédente, on a : $3S_2 = (n+1)^3 - 1 - n - 3S_1$. La question de cours a permis d'établir que $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}3S_2 &= (n+1)^3 - (1+n) - 3\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}\left(2(n+1)^2 - 2 - 3n\right) \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(n(2n+1)\right)\,.\end{aligned}$$

On en déduit le résultat suivant :

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Exercice 4 : *Composition et fonctions affines*

1. Montrer que la composée de deux fonctions affines est toujours une fonction affine.
On rappelle que les fonctions affines sont de la forme $f(x) = ax+b$, $x \in \mathbb{R}$, avec a et b deux constantes réelles.
Soit f et g deux fonctions affines, définies respectivement par $f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout x réel :

$$f \circ g(x) = f(cx+d) = a(cx+d) + b = acx + ad + b\,.$$

$h = f \circ g$ s'écrit donc sous la forme $h(x) = Ax + B$, $x \in \mathbb{R}$ avec $A = ac$ et $B = ad + b$.

2. La loi de composition est-elle commutative pour les fonctions affines ? Justifier votre réponse.
La réponse est non, il suffit de trouver un contrexemple. Considérons f et g deux fonctions affines définies respectivement par $f(x) = x-1$ et $g(x) = 2x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie que $f \circ g(0) = f(1) = 0$ et $g \circ f(0) = g(-1) = -1$, ce qui prouve que $f \circ g \neq g \circ f$.

3. On considère la fonction affine définie par $f(x) = 2x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une fonction affine g telle que $f \circ g = id$.

Considérons une fonction affine g définie par $g(x) = cx + d$, $x \in \mathbb{R}$. Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f \circ g(x) = f(cx + d) = 2(cx + d) + 1 = 2cx + 2d + 1\,.$$

La condition $f \circ g = id$ se réécrit $f \circ g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Par identification, on déduit de l'égalité précédente que $2c = 1$ et $2d + 1 = 0$, c'est à dire $c = 1/2$ et $d = -1/2$

Exercice 5 : *On considère la fonction g définie par* $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{x}$.

1. Donner l'ensemble de définition maximal de g.
   $g(x)$ est défini si et seulement si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ et $x \neq 0$. On en déduit le domaine de définition de g : $]-1, 0[\cup]0, 1[$.
2. La fonction g est-elle paire ? impaire ? Justifier votre réponse.
   Soit $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. Notons tout d'abord que l'on a :
   $$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x}\,. \qquad (1)$$
   On en déduit :
   $$g(-x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{1}{-x} = -\left(\ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x}\right) = -g(x)\,.$$
   On en déduit que g est impaire.
3. Déterminer la dérivée de g.
   En utilisant (1), on a, pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$:
   $$g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2(1-x) + x^2(1+x) + (1+x)(1-x)}{x^2(1+x)(1-x)} = \frac{x^2+1}{x^2(1+x)(1-x)} \geq 0\,.$$
4. Etudier les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de g.
   On se base encore sur l'expression (1). On a $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$, d'où l'on tire $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, et donc $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$. La fonction g étant impaire, on en déduit $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$.
5. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0, 1[$.
   D'après ce qui précède, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$. La fonction g étant continue sur $]0, 1[$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution à l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle. De plus, g étant strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique.