Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2018 - 2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°1
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

***Durée :** 1h30. Les calculatrices ne sont **pas autorisées**.*

Exercice 1 : *Questions de cours*

1. Montrer par récurrence la formule suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \, .$$
2. Montrer que, pour toutes propositions P et Q, on a :
$$(P \Rightarrow Q) \iff (non(Q) \Rightarrow non(P)) \, .$$
3. Énoncer (sans le démontrer) le théorème de dérivation des fonctions composées. *On précisera avec soin les ensembles de définition des fonctions considérées.*

Exercice 2 :

1. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier vos réponses.
   (a) $\forall r \in \mathbb{Q} \, , \, \exists \, (p,q) \in \mathbb{N}^2 \, , \, r = \dfrac{p}{q} \, .$
   (b) $\exists \, r \in \mathbb{Q} \, , \, \forall x \in \mathbb{R} \, , \, r + x \in \mathbb{Q} \, .$
   (c) $\forall \, r \in \mathbb{Q} \, , \, \exists x \in \mathbb{R} \, , \, r + x \in \mathbb{Q} \, .$
2. Donner la négation des assertions ci-dessus.

Exercice 3 : *On se propose ici de retrouver la valeur de la somme des carrés d'entiers.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \quad , \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad , \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 \, .$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 - 1 \, .$
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = S_3 + 3S_2 + 3S_1 + n.$
   Indication : développer $(k+1)^3$.

3. En déduire que $3S_2 + 3S_1 + n = (n+1)^3 - 1$.
4. En utilisant l'exercice 1, en déduire la valeur de S_2.

<u>Exercice 4 :</u> *Composition et fonctions affines*

1. Montrer que la composée de deux fonctions affines est toujours une fonction affine.
   On rappelle que les fonctions affines sont de la forme $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, avec a et b deux constantes réelles.
2. La loi de composition est-elle commutative pour les fonctions affines ? Justifier votre réponse.
3. On considère la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une fonction affine g telle que $f \circ g = id$.

<u>Exercice 5 :</u> *On considère la fonction g définie par* $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{x}$.

1. Donner l'ensemble de définition maximal de g.
2. La fonction g est-elle paire ? impaire ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer la dérivée de g.
4. Etudier les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de g.
5. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0, 1[$.