Math Analyse III automne 2018
Feuille 2 : Fonctions de plusieurs variables réelles

Exer. 2.1 On décrit ci-dessous quelques ensembles dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$.

(a) Pour chaque ensemble A ci-dessous, faire un dessin représentant la région concernée, et déterminer si A est : ouvert, fermé, borné, convexe, compact.

(b) Déterminer l'intérieur, l'adhérence, et la frontière de chaque ensemble.

Parties de $\mathbb{R}$:

$$[a,b] \text{ où } a \leq b,\, a,b \in \mathbb{R}; \quad [a,b[\text{ où } a < b,\, a,b \in \mathbb{R}; \quad \mathbb{N}; \quad \left\{ \frac{i-1}{i} : i \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Parties de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\}; \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}; \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| \geq 1\}$$

Parties de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 2\right\}; \text{ une partie finie de } \mathbb{R}^3; \ \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, z < 0\right\}.$$

Exer. 2.2 Quelle est l'adhérence de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (dans la droite $\mathbb{R}$) ?

Exer. 2.3 Cet exercice concerne des ensembles A dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Trouver trois fermés différents A tels que

$$\operatorname{int} A = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x,y) : (x-3)^2+y^2 < 1\}.$$

(b) Montrer qu'un ensemble A satisfaisant les conditions de la partie (a) de l'exercice n'est pas convexe.

(c) Trouver trois ouverts différents A tels que $\operatorname{fr} A = \{(x,y) : y = 0\}$. (On peut montrer qu'il y en a que trois.)

(d) Prouver qu'il n'existe aucun ouvert A dans $\mathbb{R}^2$ dont l'adhérence est une droite.

Exer. 2.4

(a) Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. Énoncer les conditions que doit satisfaire la fonction $x \mapsto N(x)$ afin de constituer une *norme* sur $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que ses boules unité fermée et ouverte (relativement à la norme $\|\cdot\|$) sont convexes.

(c) Prouver que la fonction $(x,y) \mapsto \theta(x,y) := |y-x| + 2|x|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exer. 2.5 Sachant que le point $(x,4,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient au segment déterminé par les points $(-3,3,1)$ et $(0,6,2)$, trouver x et z.

Exer. 2.6 Prouver qu'exactement un des ensembles suivants dans $\mathbb{R}^2$ est convexe :

$$\{(x,y) : y \geq x^2,\, 0 \leq x \leq 1\},\ \{(x,y) : y \leq x^2,\, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Exer. 2.7 (a) L'intérieur d'un ensemble dans $\mathbb{R}^n$ peut-il consister d'un singleton ?

(b) Trouver un ensemble A dans $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide dont la frontière consiste d'un singleton.

Exer. 2.8 Soit A un ensemble dans $\mathbb{R}^n$ qui est à la fois ouvert et fermé.

(a) Prouver que A est soit l'ensemble vide, soit l'espace $\mathbb{R}^n$.

(b) En déduire que la frontière d'une partie non vide et bornée est toujours non vide.

Exer. 2.9 Déterminer le domaine naturel D de chacune des fonctions suivantes, et le classifier : ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre, convexe, borné, compact.

$$\textbf{(a)}\ f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2} \qquad \textbf{(b)}\ f(x,y)=\left\{\frac{1-x^2}{y^2-1}\right\}^{1/2} \qquad \textbf{(c)}\ f(x,y,z)=\ln(xyz)$$

Exer. 2.10 Soient $\alpha,\beta>0$. Déterminer, suivant les valeurs de α,β, si la fonction $f:(\mathbb{R}^{+*})^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$ admet une limite en $(0,0)$.

Exer. 2.11 Considérons la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue, mais que f n'est pas continue au point $(0,0)$ (on pourra pour cela restreindre f à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax^2\}$).

Exer. 2.12 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes :

$$\textbf{(a)}\quad f(x,y)=\begin{cases}\cos(x+y) & \text{si } x+y\geq 0\\ \cosh(x+y) & \text{si } x+y<0\end{cases} \qquad \textbf{(b)}\quad g(x,y)=\begin{cases}x^2y & \text{si } x<y\\ y & \text{si } x\geq y\end{cases}$$

$$\textbf{(c)}\quad f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases} \qquad \textbf{(d)}\quad f(x,y)=\begin{cases}2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1\neq 0\\ x^2 & \text{sinon}\end{cases}$$

Exer. 2.13 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $(0,0)$ et qui s'annule en $(0,0)$. Utiliser un raisonnement par l'absurde afin de prouver l'existence d'un voisinage V de $(0,0)$ (par exemple, une boule centrée en $(0,0)$) tel que

$$|f(x,y)|\leq 1\ \forall\,(x,y)\in V\,.$$

Exer. 2.14 Soit C un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$ et $f:C\to\,]0,+\infty[$ une fonction continue. Utiliser le théorème de Weierstrass afin de prouver l'existence de $\delta>0$ tel que

$$f(x)\geqslant\delta\ \ \forall x\in C\,.$$

Exer. 2.15 Trouver l'infimum et le supremum de chacune des fonctions f,g,h sur le domaine A indiqué, et dans chaque cas déterminer si celui-ci est atteint (c-à-d, si un minimum/maximum existe) :

(a) $A=\mathbb{R}^2_+:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0,\, y\geq 0\}$; $f(x,y)=e^{x+y}$, $g(x,y)=e^{x-y}$, $h(x,y)=x^2-y\sin x$

(b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0,\, y>0\}$; $f(x,y)=x+1/y$, $g(x,y)=x/y$, $h(x,y)=x^2+y^2-2y$

(c) $A=\mathrm{int}\,(\mathbb{R}^2_+)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0,\, y>0\}$; $f(x,y)=\sqrt{xy}$, $g(x,y)=\sin(xy)$, $h(x,y)=\ln(xy)$

(d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|\leq 1,\, |y|\leq 1\}$; $f(x,y)=x^3y^2$, $g(x,y)=x\cos y$, $h(x,y)=y/(x+2)$

Exer. 2.16 Soit U un ouvert non vide dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Définir le sens de la phrase : f appartient à $C^1(U)$.

On prend $n = 2$, $U =$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$, et $f(x,y) = \sin(\pi x e^{xy}) + \ln(1 - x^2 - y^2)$.

(b) Calculer les dérivées partielles de f.

(c) Montrer que f appartient à $C^1(U)$.

Exer. 2.17 Prouver qu'il existe un voisinage ouvert V du point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $g(x,y) := \tan(e^{xy})$ soit continûment dérivable sur V (c-à-d, appartienne à $C^1(V)$). Peut-on affirmer que $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

Exer. 2.18 Trouver tous les points critiques des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3$

(b) $g(x,y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7$

(c) $h(x,y) = 3x^2y + x^2 - 6x - 3y - 2$

Exer. 2.19 (a) Trouver les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + 4xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

(b) Montrer que f n'admet ni un minimum ni un maximum global.

(c) Trouver le min et le max de la fonction $g(x) := x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

(d) Trouver le min et le max de la fonction f sur le pavé $A := [-1,1] \times [-1,1]$.

Exer. 2.20 Soit $c > 0$ et soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) := xy(x+y-c)$.

(a) Prouver que le problème de minimiser f sur le domaine fermé A constitué du triangle avec sommets $(0,0), (c,0), (0,c)$ et de son intérieur admet une solution.

(b) Identifier la solution.

Exer. 2.21 Trouver le minimum de la fonction $f(x,y) := 4x^2 + 2xy - 3y^2$ sur le pavé $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 0$.

Exer. 2.22 On cherche à identifier le point de la surface $z = xy - 1$ qui est le plus proche de l'origine.

(a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence d'un tel point ?

(b) Le trouver.

Exer. 2.23 Trouver les extrémums de la fonction $2xy + (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ sur la boule unité fermée.

Exer. 2.24 Le résultat suivant (prouvé en cours) généralise le théorème de Weierstrass. Il est utile quand la compacité de l'ensemble sous-jacent fait défaut. Il porte sur la minimisation de f par rapport à l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, où $f : A \to \mathbb{R}$ est donnée.

Théorème *Supposons qu'il existe un point $\bar{x} \in A$ tel que l'ensemble $E := \{x \in A : f(x) \leq f(\bar{x})\}$ soit compact, et tel que f soit continue sur E. Alors f atteint un minimum sur A.*

(a) À l'aide du théorème, prouver que la fonction $f(x,y) := \dfrac{12}{x} + \dfrac{18}{y} + xy$ atteint un minimum sur $\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+$, le premier quadrant ouvert de $\mathbb{R}^2$; c-à-d, la partie $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\,,\, y > 0\}$. (On observe que le théorème de Weierstrass ne s'applique pas à cet exemple : pourquoi ?)

(b) Trouver la solution du problème d'optimisation de la partie (a).

Exer. 2.25 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que $\inf\limits_{x\in A} f = \inf\limits_{x\in \operatorname{adh} A} f$.

(b) Qu'en est-il de l'éventuelle égalité entre $\inf\limits_{x\in A} f$ et $\inf\limits_{x\in \operatorname{int} A} f$?

Exer. 2.26

(a) Montrer que les fonctions

$$f(x,y) = 5xy,\; f(x,y) = e^x \sin y,\; f(x,y) = \arctan(y/x),\; f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

sont toutes solution de l'équation aux dérivées partielles (edp) de Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(b) Trouver une fonction h telle que $h_x = x + y$ et $h_y = x + 3$.

(c) Soit $f = x_1^3 x_2^5 x_3^7 x_4^{13}$. Trouver $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x_1\, \partial x_3\, \partial x_1^2\, \partial x_4\, \partial x_2}$.

Exer. 2.27 On prend $f(x,y,z) = x^2\cos(y^3+z^2)$. Pourquoi sait-on que $f_{zyxxyxyy} = 0$, sans rien calculer ? Sait-on aussi que $f_{xyyzzzy} = 0$? (Expliquer)

Exer. 2.28 Une certaine fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ satisfait

$$f_x = 3x + ay^2,\; f_y = bxy + 2y,\; f_y(1,1) = 3.$$

Trouver a et b. Trouver ensuite une fonction f qui satisfait les conditions données ; est-elle unique ?

Exer. 2.29 Y a-t-il une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $f_x = e^x \cos y$ et $f_y = e^x \sin y$?

Exer. 2.30 On suppose que $u = F(x,y,z)$ et $z = f(x,y)$, où les fonctions sont de classe C^2. Trouver une formule qui exprime $\partial u/\partial x$ en fonction des dérivées partielles de F et f. De même pour $\partial^2 u/\partial x^2$.

Exer. 2.31

(a) Soit φ une fonction dans $C^2(\mathbb{R})$, et soit Ω un ouvert compris dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que la fonction $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (x,y) \in \Omega.$$

(b) Soit f une fonction dans $C^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que si $y \in C^2(\mathbb{R})$ est définie implicitement comme une fonction de x par l'équation $f(x,y) = 0$, où $f_y \neq 0 \;\; \forall (x,y)$, alors on a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{f_x^2 f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}}{f_y^3}\,.$$

Géométrie différentielle

Exer. 2.32 On s'intéresse à la courbe de niveau $\mathcal{C}$ suivante dans $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + xy + 2y^3 = 4\}.$$

(a) Trouver l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point $(1,1)$.

(b) Trouver l'équation de la droite qui est normale à $\mathcal{C}$ au point $(1,1)$.

(c) Prouver que $\mathcal{C}$ n'admet aucun point où la droite tangente est verticale ou horizontale.

Exer. 2.33 Trouver l'équation du plan tangent, ainsi que de la droite normale, à la surface $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ au point $(1,2,-1)$.

Exer. 2.34 Montrer que le point $(2,1,1)$ est commun aux deux surfaces

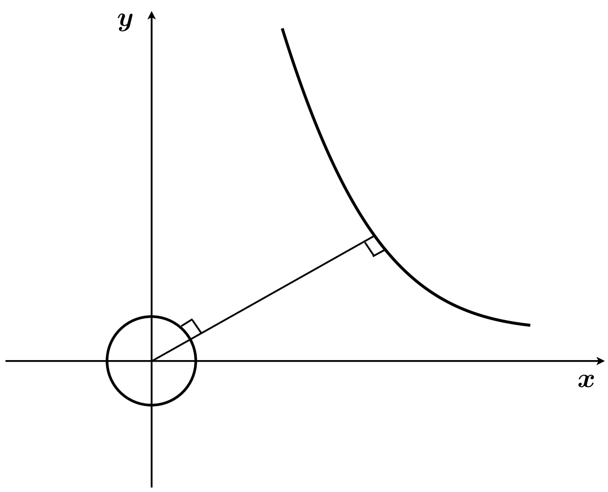
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0, \quad x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9,$$

et que les surfaces sont tangentes en ce point.

Exer. 2.35 Trouver le ou les points sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ qui sont le plus proche et le plus loin du point $(2,1,2)$, en montrant que ceux-ci existent.

Exer. 2.36 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) := 4y - x - z$. Trouver les extrémums de f sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Exer. 2.37 Montrer que la distance minimale entre les deux courbes $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2y = 16$ vaut $2\sqrt{3} - 1$. (Une indication graphique est donnée ci-dessous.)



Calcul différentiel du second ordre

Exer. 2.38 Soit D le demi-plan ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. On définit $f : D \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy\ln x - 6y - x.$$

1. Déterminer la direction de la normale à la courbe de niveau $f = -4$ au point $(1,1)$.
2. Calculer $f(1+h, 1+k)$ approximativement, à l'ordre 1, quand (h,k) est petit.
3. Prouver que f admet un minimum local au point $(1,3)$.

4. Quelle est la valeur de $f(1+h,3+k)$ quand une approximation comme celle de la partie (3) est faite ?
5. Calculer le développement de Taylor d'ordre deux de f en $(1,3)$. Quelle valeur approximative de $f(1+h,3+k)$ fournit-il ?

Exer. 2.39 Trouver le développement limité d'ordre deux et autour de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$. De même pour la fonction $u \mapsto \sin u$. Ensuite utiliser ces deux réponses afin de trouver le développements limité d'ordre deux à l'origine de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^x \sin(x+y)$. Comparer la réponse à celle obtenue par un calcul direct.

Exer. 2.40 Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 des fonctions suivantes aux voisinages des points donnés en justifiant qu'on y a droit :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^y \\ & & \text{en } (1,0) & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x\ln y - y\ln x \\ & & \text{en } (1,1) & \end{array} .$$

Exer. 2.41 On a vu (Exer. 2.19) que la fonction $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ n'admet ni un minimum ni un maximum global, et qu'elle possède quatre points critiques : $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$. Classifier ces points critiques.

Exer. 2.42 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Trouver et classifier ses points critiques.

Exer. 2.43 Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. En un certain point $P \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de f vaut

$$\begin{bmatrix} -7 & 19 \\ 19 & -59 \end{bmatrix}.$$

Autour de P, quelle est la position du graphe de la fonction par rapport à son plan tangent en P ?

Fonctions convexes

Exer. 2.44 (a) Prouver que les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{t^2}$ sont convexes sur $\mathbb{R}$. La convexité est-elle stricte ?

(b) Démontrer que la fonction $g(t) = e^{t^3}$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle est convexe sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]0,\infty[$.

Exer. 2.45 Montrer que la fonction $x \mapsto 1/(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$. La fonction est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

Exer. 2.46 Prouver que la fonction $(x,y) \mapsto xy$ n'est convexe sur aucune boule dans $\mathbb{R}^2$, mais que les fonctions $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2+xy$ sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.

Exer. 2.47 Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x) : $\exp(x+y)$, $\exp(xy)$, $\exp x + \exp y$.

Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$? (Moralité : la convexité ne se vérifie pas une coordonnée à la fois.)

Exer. 2.48 Le DL d'ordre deux en $P = (1,2)$ d'une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est donné par $1+x+2y+3xy+5y^2+o((x-1)^2+(y-2)^2)$.

(a) Écrire le DL en forme polynomiale canonique (c-à-d, en puissances de $x-1$ et $y-2$).

(b) Trouver $f(P)$, $\nabla f(P)$, et $\nabla^2 f(P)$, et écrire le DL en forme matricielle.

(c) La fonction f est-elle convexe autour du point P ?

Exer. 2.49 Est-ce que la fonction f de l'Exer. 2.38 est convexe sur son domaine D ?

Exer. 2.50 On sait que le DL d'ordre deux en $(0,0)$ d'une certaine fonction $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est donné par $h(x,y) = 1+x+2y+xy+\mathrm{o}(x^2+y^2)$.

(a) Trouver le DL d'ordre deux en $(0,0)$ de $1/h$ (justifier son existence).

(b) Prouver que la fonction $1/h$ est convexe dans une boule autour de $(0,0)$, mais que ceci n'est pas le cas pour h.

Exer. 2.51 Soit $Q = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ le premier quadrant ouvert, et soit $f : Q \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{16}{xy} + 4x + 3y^2 - 2e^{1-y}$.

On s'intéresse au problème (P) de minimiser la fonction f sur l'ensemble Q.

1. Prouver que la fonction $\varphi(t) := 3t^2 - 2e^{1-t}$ est convexe sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Prouver que la fonction $g(x,y) := 1/(xy)$ est strictement convexe sur Q.
3. Déduire la convexité stricte de f sur Q à partir de (1) et (2).
4. Vérifier que le point $(2,1)$ est un point critique de f.
5. Expliquer comment la solution du problème (P) s'ensuit.

Exer. 2.52 Soit $M = \left[m_{ij}\right]$ une matrice $n \times n$ qui est symétrique. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(x) := (Mx) \bullet x = \langle x, Mx \rangle$. (Rappel : un point dans $\mathbb{R}^n$, lorsqu'il fréquente des matrices, est une colonne $n \times 1$.) Alors f est la *forme quadratique* associée à la matrice M.

(a) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j$ et prouver que $\nabla f(x) = 2Mx$.

(b) On sait que $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$; en déduire de la partie (a) que $\nabla \|x\|_2^2 = 2x$.

(c) Déterminer $\nabla^2 f(x)$.

(d) Prouver que f est convexe ssi $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x$.

(e) Prouver que f est strictement convexe lorsque M est définie positive.

Exer. 2.53 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction convexe. Prouver que f ne peut pas admettre exactement deux points critiques.