
Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)), \quad t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que le problème (1) admet une unique solution maximale y. Montrer que cette solution est globale, *i.e.* définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Montrer de plus que cette solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Quelles sont les solutions stationnaires de l'équation différentielle $y'(t) = \sin(y(t))$ (*i.e.* les fonctions constantes solutions) ?
3. On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer que

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall t \in \mathbf{R},\ 0 < y(t) < \pi, \\ (ii) & \lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 0,\ \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \pi \end{array}$$

Exercice 2. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $F : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une application de classe C^2, et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla F(x(t)),\ t \in \mathbf{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

où ∇F désigne le gradient de F et est défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\ \nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_d}(x) \right).$$

On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = +\infty.$$

1. Montrer que le problème de Cauchy (2) admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]t_-, t_+[$ ($t_\pm$ finis ou non).
2. Montrer que la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante sur $]t_-, t_+[$. En déduire que $t_+ = +\infty$.
3. En considérant le cas $d = 1$ et $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^4/4$, montrer que l'on peut avoir $t_- > -\infty$.

Exercice 3. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $\alpha > 0$. Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une application localement lipschitzienne telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \forall y \in \mathbf{R}^d,\ \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé.
Le but de cet exercice est de montrer que f est un homéomorphisme.

1. Montrer que f est injective.
2. Le but de cette question est de montrer que 0 est dans l'image de f, *i.e.* qu'il existe $a \in \mathbf{R}^d$ tel que $f(a) = 0$.

(a) Soit $T > 0$. On suppose que x et y sont deux solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = -f(x(t)) \tag{3}$$

définies sur $[0, T]$ (au moins).
Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(0) - y(0)\| e^{-\alpha t}$.

(b) Justifier que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -f(x(t)), t \in \mathbf{R}, \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]T_-, T_+[$.

(c) Soit $h \in]T_-, T_+[$. Montrer que $t \mapsto x(t + h)$ est solution de (3) sur un intervalle ouvert contenant 0. On précisera sa valeur en 0.

(d) En utilisant (a) et (c), montrer que pour tout $t \in [0, T_+[$, $\|x'(t)\| \leq \|x'(0)\| e^{-\alpha t}$.

(e) Montrer que $T_+ = +\infty$.

(f) Montrer que $x(t)$ admet une limite a quand t tend vers $+\infty$, puis que $f(a) = 0$.

3. Montrer que $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est surjective.
4. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^d$, $\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \dfrac{1}{\alpha}\|x - y\|$.
5. Conclure.

Exercice 4.

Soit $f, g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ telles que

(i) $\forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \quad f(t, x) < g(t, x);$ (5)

(ii) il existe une fonction continue $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ telle que

$\forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ |f(t, x) - f(t, y)| \leq k(t)|x - y|,\ |g(t, x) - g(t, y)| \leq k(t)|x - y|.$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On considère les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{6}$$

1. Justifier que les problèmes de Cauchy (6) admettent chacun une unique solution maximale définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. On note $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la solution du premier et $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ celle du deuxième.
2. Le but de cette question est de montrer que pour tout $t > t_0$, on a $x(t) < y(t)$.
   On note $w = x - y$ et $J = \{\tau \in]t_0, +\infty[: \forall t \in]t_0, \tau[, w(t) < 0\}$.
   (a) Montrer que J n'est pas vide.
   (b) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $w'(t) < k(t)|w(t)|$.
   (c) Soit $\tau \in J$. Montrer que pour tout $t \in J \cap]\tau, +\infty[$, $w(t) < w(\tau) e^{-\int_\tau^t k(s) ds}$.
   (d) Montrer que $J =]t_0, +\infty[$ (ce qui est le résultat cherché).
3. Que peut-on dire pour $t < t_0$?
4. Montrer que si l'inégalité (5) est large, alors pout tout $t \geq t_0$, $x(t) \leq y(t)$.