
Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui le satisfont :

1. $\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbf{R} \forall x' \in \mathbf{R} |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$
2. $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbf{R} \forall x' \in \mathbf{R} \exists \delta > 0 |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

Exercice 2. Dans cet exercice, on munit \mathbf{R} (ainsi que ses intervalles) de la distance usuelle. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ? lipschitziennes ?

$$\begin{array}{lll} f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} & g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} & h: [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2, & x \mapsto \sqrt{x}, & x \mapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

Exercice 3. On munit $]0, +\infty[$ de la distance usuelle et, pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n la fonction

$$\begin{array}{l} f_n :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{x}{n+x}. \end{array}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X . On note χ_A la fonction caractéristique de A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$. On suppose que \mathbf{R} est muni de la distance usuelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que χ_A soit continue.
2. Déterminer l'ensemble des points où χ_A est continue.
3. Que peut-on dire de $\chi_{\mathbf{Q}}$?

Exercice 5. On suppose que \mathbf{R} est muni de la distance usuelle. Pour $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, on considère la fonction

$$\begin{array}{l} f_{n,m} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto (\cos \pi n! x)^{2m}. \end{array}$$

1. Montrer que pour chaque $n \in \mathbf{N}$ fixé, la suite $(f_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers une suite g_n que l'on déterminera. Cette convergence est-elle uniforme ?
2. Montrer que la suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers $\chi_{\mathbf{Q}}$.
3. En déduire qu'il existe une fonction qui n'est continue en aucun point et qui est limite (simple) de limites (simples) de fonctions continues sur \mathbf{R} .

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow [0, 1]$ une application. Dans cet exercice l'intervalle $[0, 1]$ est muni de la distance usuelle.

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$f_n : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \inf_{y \in X} (f(y) + nd(x, y)).$$

0. Remarquer que pour tout $n \geq 0$, on a $f_n \leq f$.
1. Montrer que pour chaque $n \geq 0$, la fonction f_n est n -lipschitzienne.
2. Montrer que si f est continue en a alors la suite $(f_n(a))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Indication : vérifier que

$$\forall r > 0, \quad \forall n \geq 1/r, \quad f_n(a) \geq \inf_{y \in B(a, r)} f(y).$$

3. Montrer que si f est uniformément continue alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f .
4. En déduire que la fonction racine carrée de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ est limite uniforme de fonctions lipschitziennes.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. On considère l'application

$$\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f \mapsto f(0).$$

Montrer que φ est linéaire mais pas continue. Qu'en est-il si on munit E de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \rightarrow E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que μ est bien définie que que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0, 1].$$

Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.

3. En déduire la norme de μ .

Exercice 9. On considère $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Rappelons que pour une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$, la norme de u vaut $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$.

Soit φ l'application de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ vers lui même qui à toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ associe la suite

$$\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire continue.
2. Déterminer la norme de φ .