

---

Feuille d'exercices n° 4

---

**Exercice 1.** Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  qui le satisfont :

1.  $\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbf{R} \forall x' \in \mathbf{R} |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbf{R} \forall x' \in \mathbf{R} \exists \delta > 0 |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

**Exercice 2.** Dans cet exercice, on munit  $\mathbf{R}$  (ainsi que ses intervalles) de la distance usuelle. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ? lipschitziennes ?

$$\begin{array}{lll} f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} & g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} & h: [1, +\infty] \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2, & x \mapsto \sqrt{x}, & x \mapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

**Exercice 3.** On munit  $]0, +\infty[$  de la distance usuelle et, pour tout entier  $n \geq 0$ , on note  $f_n$  la fonction

$$\begin{array}{l} f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[ \\ x \mapsto \frac{x}{n+x}. \end{array}$$

Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers la fonction identiquement nulle. La convergence est-elle uniforme ?

**Exercice 4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie de  $X$ . On note  $\chi_A$  la fonction caractéristique de  $A$  définie par  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ . On suppose que  $\mathbf{R}$  est muni de la distance usuelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\chi_A$  soit continue.
2. Déterminer l'ensemble des points où  $\chi_A$  est continue.
3. Que peut-on dire de  $\chi_{\mathbf{Q}}$  ?

**Exercice 5.** On suppose que  $\mathbf{R}$  est muni de la distance usuelle. Pour  $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ , on considère la fonction

$$\begin{array}{l} f_{n,m} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto (\cos \pi n! x)^{2m}. \end{array}$$

1. Montrer que pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  fixé, la suite  $(f_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$  converge simplement vers une suite  $g_n$  que l'on déterminera. Cette convergence est-elle uniforme ?
2. Montrer que la suite  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge simplement vers  $\chi_{\mathbf{Q}}$ .
3. En déduire qu'il existe une fonction qui n'est continue en aucun point et qui est limite (simple) de limites (simples) de fonctions continues sur  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $f : X \rightarrow [0, 1]$  une application. Dans cet exercice l'intervalle  $[0, 1]$  est muni de la distance usuelle.

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on considère la fonction

$$f_n : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \inf_{y \in X} (f(y) + nd(x, y)).$$

0. Remarquer que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $f_n \leq f$ .
1. Montrer que pour chaque  $n \geq 0$ , la fonction  $f_n$  est  $n$ -lipschitzienne.
2. Montrer que si  $f$  est continue en  $a$  alors la suite  $(f_n(a))_{n \geq 0}$  converge vers  $f(a)$ .

Indication : vérifier que

$$\forall r > 0, \quad \forall n \geq 1/r, \quad f_n(a) \geq \inf_{y \in B(a, r)} f(y).$$

3. Montrer que si  $f$  est uniformément continue alors  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers  $f$ .
4. En déduire que la fonction racine carrée de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  est limite uniforme de fonctions lipschitziennes.

**Exercice 7.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ continue}\}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$ . On considère l'application

$$\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f \mapsto f(0).$$

Montrer que  $\varphi$  est linéaire mais pas continue. Qu'en est-il si on munit  $E$  de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  ?

**Exercice 8.** Soit  $E$  l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ . On considère l'application  $\mu : E \rightarrow E$  définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que  $\mu$  est bien définie que que  $\mu$  est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0, 1].$$

Pour chaque  $n \geq 1$ , calculer  $\|f_n\|_1$  et  $\|\mu(f_n)\|_1$ .

3. En déduire la norme de  $\mu$ .

**Exercice 9.** On considère  $\ell^\infty(\mathbf{R})$  l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Rappelons que pour une suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ , la norme de  $u$  vaut  $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$ . Soit  $\varphi$  l'application de  $\ell^\infty(\mathbf{R})$  vers lui même qui à toute suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$  associe la suite

$$\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

1. Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire continue.
2. Déterminer la norme de  $\varphi$ .