Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2017-2018**

L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbf{R}$. Montrer les égalités et l'inégalité suivantes :

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
2. si $A \cap B \neq \emptyset$, $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$,
3. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
   On rappelle que $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

Exercice 2. On définit, pour $j = 1, \ldots, 4$, l'application $d_j : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= (x-y)^2, \qquad & d_3(x,y) &= |x-2y|, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{|x-y|}, \qquad & d_4(x,y) &= |x^2-y^2|. \end{aligned}$$

Parmi ces applications, la(les)quelle(s) défini(ssen)t une distance sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3.

1. Soit (X,d) un espace métrique. Soit $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une application croissante s'annulant uniquement en 0 et sous-additive, *i.e.* : pour tout $(u,v) \in (\mathbf{R}^+)^2$, $\phi(u+v) \leq \phi(u) + \phi(v)$. Montrer que $\delta = \phi \circ d$ est une distance sur X.
2. Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto \dfrac{u}{1+u}$ satisfait les hypothèses de la question précédente.
3. Montrer que $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ est une distance sur $\mathbf{R}$, qui définit la même topologie que la distance usuelle associée à la valeur absolue, mais que ces deux distances ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 5.

1. Soit (X,d) un espace métrique, $r > 0$. Montrer que le diamètre de toute boule de rayon r dans X (ouverte ou fermée) est inférieur ou égal à $2r$.
2. Soit X un ensemble muni de la distance discrète. Quel est le diamètre de $B(x, \frac{1}{2})$ pour $x \in X$?
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$. Calculer le diamètre des boules (fermées et ouvertes) de E en fonction de leur rayon.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, tout $x \in \mathbf{R}^n$, on définit $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.
2. Dans la suite, on suppose que $p \in]1, +\infty[$. Soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) *Inégalité de Young.* Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a
   $$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
   Indication : on pourra utiliser la concavité de la fonction ln sur $\mathbf{R}^+$, ou étudier à b fixé, la fonction $x \mapsto \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}b^q - xb$.
   (b) *Inégalité de Hölder.* Montrer que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, on a
   $$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$
   Indication : on pourra commencer par le cas où $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
   (c) *Inégalité de Minkowski.* Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, tout $y \in \mathbf{R}^n$, on a
   $$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$
   Indication : montrer d'abord en utilisant l'inégalité de Hölder les deux inégalités suivantes
   $$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1},$$
   $$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1}.$$

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
   Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement $B(f, r)$.
2. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
3. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 8. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?