Université Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2017-2018

Intégrales à paramètres

Feuille 7

Exercice 1 Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t \right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
2. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$, ainsi que la valeur de $J = \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2
On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geqslant 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$ sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. Décomposer la fraction $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
   (c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 4 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)$ est μ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose alors pour $x \geqslant 0, F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\,\mathrm{d}\mu(t)$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. On suppose que l'application $t \mapsto t^2$ est μ-intégrable. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2}$. On pourra utiliser l'inégalité $1 - \cos u \leqslant \frac{u^2}{2}$ (après l'avoir justifiée).
4. On ne suppose plus que $t \mapsto t^2$ est μ-intégrable, mais on suppose que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2} = 0$.
   (a) Soit G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \frac{1-F(x)}{x^2}$. Montrer que G est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que $t \mapsto t^2$ est μ-intégrable. On pourra penser au lemme de Fatou.
   (c) Que peut-on en déduire pour la mesure μ ?

Exercice 5 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
2. Établir l'égalité valable pour tout réel x :
$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
3. (a) Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.
   (b) En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution d'une équation différentielle du second ordre.
   (c) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.
4. Déduire de tout ceci la valeur de la constante C.

Exercice 6 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que F satisfait à une équation différentielle du premier ordre.
   (b) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera la question 2 de l'exercice 1.

Exercice 7 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que pour $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.
4. En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera aussi la question 2 de l'exercice 1.

Exercice 8 Pour $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(t,x) = \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est λ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour $t > 0$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   (c) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 9 Pour $y > 0$, soit $F(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim\limits_{y\to\infty} F(y)$.
2. (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.
   (c) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geqslant 0$.
   (d) Retrouver enfin la valeur de I.

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est λ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer ensuite que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 Soit $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(t)$ puis $F(t)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

Exercice 12 On rappelle (feuille 6, exercice 23, question 4) que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

1. Pour tout $t \geq 0$ on pose $S(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x} \sin x\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$, et calculer $S'(t)$ pour $t > 0$.
   (b) Déterminer la limite de S en ∞, et calculer $S(t)$ pour tout $t > 0$.
2. Soit $A > 0$ et $t > 0$. Montrer que $\displaystyle\left|\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{A}$.
3. Prouver que pour tout $A > 0$ on a $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.