Université Lyon 1 — Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Mesure et intégration — Année 2017-2018

Fonctions mesurables
Feuille 3

Dans ce qui suit, les espaces mesurables sont désignés $(X, \mathscr{T})$ ou $(X_j, \mathscr{T}_j)$. Sauf mention contraire, X est muni d'une tribu $\mathscr{T}$.

Propriétés élémentaires

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble $[2, 3[\cap \mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. Une fonction $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
3. Si $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ est mesurable, et si $g : (X_2, \mathscr{T}_2) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée, alors $g \circ f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée.
4. Étant donnée $f : (X, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, alors f est mesurable.
5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.
6. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \cos(x) = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Généralisation ?
7. Si $A \subset X$, alors χ_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.
8. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, est borélienne.
9. La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable $\iff$ $|f|$ est mesurable.

Exercice 2 Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathscr{T})$ dans $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$.
2. $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

Fonctions boréliennes

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f est borélienne.
2. Montrer que l'ensemble des points où f n'est pas continue est au plus dénombrable.
3. Plus généralement, si $f : I \to \mathbb{R}$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle) est continue en dehors d'un ensemble au plus dénombrable, alors f est borélienne.

Exercice 4 Soit $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ une partition de l'espace métrique X, avec :

(i) I au plus dénombrable ;

(ii) A_i borélien pour tout $i \in I$.

Pour chaque i, soit $f_i : A_i \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On définit la fonction « à accolade » $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$.

1. Montrer que f est borélienne.
2. Retrouver comme cas particuliers les conclusions de l'exercice précédent.
3. Énoncer et prouver un résultat analogue si X est mesurable.
4. Montrer que l'hypothèse « I au plus dénombrable » est essentielle.

Exercice 5

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' est borélienne.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) f est dérivable en x et $f'(x) = \ell$.
   (ii) Nous avons la double égalité :
$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{m\to\infty} \inf \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \,;\, h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \,;\, h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\}.\end{aligned}$$
3. En déduire que, si f est continue, alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} f'(x) & \text{si } f \text{ est dérivable en } x, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est borélienne.
4. Vrai ou faux ? Si $g = 0$, alors f est constante.

Opérations avec les fonctions mesurables

Exercice 6 Soient $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in X, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que g est mesurable.

Exercice 7 Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On définit pour tout $M > 0$ la fonction f_M par
$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| < M \\ M, & \text{si } f(x) \geqslant M \\ -M, & \text{si } f(x) \leqslant -M \end{cases}.$$
Montrer que f est mesurable si et seulement si f_M est mesurable pour tout $M > 0$.

Exercice 8 Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler pourquoi $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ sont mesurables.
2. En déduire que $B := \left\{ x \in X \,;\, \big(f_n(x)\big)_{n\geq 0} \text{ est bornée} \right\}$ est mesurable.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $g : X \to \mathbb{R}$ par $g(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} \,;\, f_n(x) \geqslant a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$. Montrer que g est mesurable.

Exercice 9 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, de mesure finie. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. On se propose de montrer le théorème d'Egoroff, qui affirme que « $f_n \to f$ uniformément sauf éventuellement sur un petit ensemble ».

1. La fonction f est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$E_n^k = \bigcap_{p\geqslant n} \{x \in X \,;\, |f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}.$$
   Montrer que $E_n^k \in \mathscr{T}$. Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? entre E_n^k et E_n^{k+1} ?

3. Montrer que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n_k \in \mathbb{N}, \quad \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}\ .$$

4. En déduire le théorème d'Egoroff : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $X \setminus A$.

Des fonctions étagées aux fonctions mesurables

Dans cette partie, nous donnons des exemples de la technique suivante : pour montrer une propriété commune à toutes les fonctions mesurables, on commence par étudier le cas des fonctions étagées, puis le cas général s'obtenant par passage à la limite.

Exercice 10 Soit $\mathscr{T}$ la tribu engendrée par les parties finies de X. Montrer que $f : (X, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ est mesurable SSI il existe un ensemble $D \subset X$ au plus dénombrable tel que $f_{|D^c}$ soit constante. On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice 11 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe sur X une plus petite tribu, notée $\mathscr{T}_f$ telle que $f : (X, \mathscr{T}_f) \to \mathbb{R}$ soit mesurable. Est-ce une tribu « connue » ?
2. Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.
3. Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction partie entière.
4. On revient au cas général. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une autre fonction. Montrer le lemme de Doob : g est mesurable (pour la tribu $\mathscr{T}_f$) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $g = h \circ f$. On pourra commencer par le cas où g est étagée.