Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Questions de cours (exercice 1)

1) Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, est intégrable (au sens de Lebesgue) si elle est mesurable (lorsque I est muni de la tribu de Lebesgue et $\mathbb{R}$ de la tribu de Borel) et si $\int_I |f(x)|dx < +\infty$.

Si c'est le cas, son intégrale est le réel
$\int_I f(x)dx := \int_I f_+(x)dx - \int_I f_-(x)dx$, avec $f_+ = \max(f,0)$,
et $f_- = \max(-f,0)$.

(Si $g : I \to \mathbb{R}^+$ est mesurable,
$\int_I g(x)dx = \sup\left\{ \int_I h(x)dx \,;\, h \leq g \text{ et } h \text{ étagée mesurable} \right\}$)

2) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}^+$ mesurables alors la suite $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\int_X f d\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

3) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{C}$ intégrables, tendant simplement vers $f : X \to \mathbb{C}$.
Si de plus il existe $g : X \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que
$|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$),
alors f est intégrable et la suite $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers

$\int_X f d\mu$ dans $\mathbb{C}$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $x \mapsto \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ est continue donc borélienne, de même que la fonction cos.
De plus, $[0,n]$ est un fermé donc un borélien, donc $\mathbb{1}_{[0,n]}$ est borélienne. Finalement, f_n est borélienne, donc mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, comme produit de fonctions boréliennes.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, $f_n(x) = 0$ quel que soit n.
si $x \geqslant 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x \in [0, n[$.
Donc $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x$ pour tout $n \geqslant N$.

Or $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, n[$,

et $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $n \ln(1-x) = -x + O\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $x > 0$ et lorsque $n \to \infty$. En $x = 0$, $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = 0$, donc $n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $\left(n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)_{n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1}$ tend vers $-x$.
Donc $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ tend vers e^{-x} lorsque $n \to +\infty$, quel que soit $x \in \mathbb{R}^+$

(Ce résultat peut même être vu comme la définition de e^{-x}, si on le connaissait pas par ailleurs.)
Par suite, pour tout $x \geqslant 0$, $f_n(x)$ tend vers $e^{-x} \cos x$ lorsque $n \to \infty$.
En conclusion, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x} \cos x \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

3) si $x \notin [0,n]$, $|f_n(x)| = 0$.

si $x = n$, $|f_n(x)| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

si $x \in [0,n[$, $|f_n(x)| = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}|\cos x|$,

et $\ln(1-\frac{x}{n}) \leq -\frac{x}{n}$. Comme la fonction exponentielle est croissante, ceci implique $|f_n(x)| \leq e^{-x}|\cos x| \leq e^{-x}$.

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto e^{-x}$. Elle est intégrable puisque $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 < +\infty$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$, par définition de f_n.

D'après les questions précédentes on peut appliquer le théorème de convergence dominée. On en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\, dx$.

On peut de plus calculer cette intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\, dx = Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+i)x}dx\right) = Re\left(\frac{1}{1-i}\right) = \frac{1}{2}.$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 3 Soit $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto (-1)^n (\ln x)\, x^{2n}$,

pour $n \in \mathbb{N}$.

1) La fonction $\ln :]0,1[\to \mathbb{R}$ est continue donc borélienne, de même que la fonction polynomiale $x \mapsto x^{2n}$.
Donc f_n est borélienne comme produit de fonctions boréliennes.

De plus, $\int_{]0,1[} |f_n(x)|\,dx \leq \int_{]0,1[} (-\ln x)\,dx$.

Or $x \mapsto x\ln x - x$ une primitive de $\ln$, et elle tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
Donc la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_{]0,1[} (-\ln x)\,dx = 1$.

Ceci prouve que f_n est intégrable.

Calculons $\int_{]0,1[} f_n(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f_n(x)\,dx$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^1 f_n(x)\,dx = (-1)^{n+1} \int_\varepsilon^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx + \left[(-1)^n (\ln x) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_\varepsilon^1$

par intégration par parties, d'où $\int_\varepsilon^1 f_n(x)\,dx = (-1)^{n+1}\left(\frac{1-\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right) + (-1)^{n+1} \times (\ln \varepsilon) \frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}$.
Puisque $(\ln \varepsilon)\, \varepsilon^{2n}$ tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, on en déduit

$$\int_{]0,1[} f_n(x)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

2) Comme f_n est de signe constant sur $]0,1[$, on a $\int_{]0,1[} |\ln x|\,dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge car $\frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{4n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{]0,1[} |f_n(x)|\,dx$ converge.

3) Soit $x \in]0,1[$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument car la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2n}$ converge et pour tout n, $|f_n(x)| = |\ln x|\, x^{2n}$.

De plus, on sait que pour $u \in]0,1[$, $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$.

En appliquant cette formule à $u = x^2$, on obtient que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \ln x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

4) Soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$.

Elle est borélienne comme produit de $\ln$ et de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. De plus, pour tout $x \in]0,1[$,

$|F(x)| \leq |\ln x|$ et $\ln$ est intégrable sur $]0,1[$.
Donc F est intégrable sur $]0,1[$.

Ce fait découle également de l'application du théorème d'interversion entre intégrale et sommation, qui s'applique ici car la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{]0,1[} |f_n(x)|\,dx$ converge, d'après la question 2), et $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

5) D'après le théorème d'interversion, on a :

$$\int_{]0,1[} F(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

(ce réel est égal à $-C$, où C est appelée constante de Catalan).

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 4

1) Comme φ est la densité de la mesure de probabilité μ, on a $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mu = \mu(\mathbb{R}) = 1$.

2) Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $F_t : x \mapsto e^{itx}$ est mesurable comme composée de la fonction linéaire $x \mapsto itx$ et de l'exponentielle toutes deux boréliennes.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F_t(x)| = 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable par rapport à μ.
Donc F_t aussi.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{itx}$ est continue.
De plus, $|e^{itx}| = 1$ pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, et $\int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mu < +\infty$.
Donc la fonction $G : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} F_t \, d\mu$ est continue d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

4) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a alors $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} e^{-x^2/2} dx$.

Montrons par récurrence sur n que la fonction $G : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} e^{-x^2/2} dx$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

La question 3) montre que c'est vrai pour $n = 0$, mais pour pouvoir itérer, il faut préciser l'hypothèse de récurrence.
Soit (P_n) la propriété :
G est n fois dérivable et il existe une fonction polynomiale p_n (de degré n) telle que $G^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} p_n(x) e^{-x^2/2} dx$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La propriété (P_0) est vraie avec $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons (P_n) vraie :
pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\, p_n(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$,
avec p_n polynomiale (de degré n).
Montrons qu'alors $G^{(n)}$ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$G^{(n+1)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\, p_{n+1}(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$ avec $p_{n+1}(x) = ix\, p_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

• la fonction $x \mapsto e^{ixt}\, p_n(x)\, e^{-x^2/2}$ est intégrable, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, car $|e^{ixt}\, p_n(x)\, e^{-x^2/2}| = |p_n(x)|\, e^{-x^2/2}$,
il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|p_n(x)| \leq C e^{x^2/4}$,
d'où $|p_n(x)| \leq C e^{-x^2/4}$, et la fonction $x \mapsto e^{-x^2/4}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (on peut considérer ce fait connu, puisqu'on a déjà utilisé implicitement que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/4}\, dx = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy$).

• pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{ixt}\, p_n(x)\, e^{-x^2/2}$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto ix\, e^{ixt}\, p_n(x)\, e^{-x^2/2}$.

• si on pose $p_{n+1}(x) = ix\, p_n(x)$, p_{n+1} est polynomiale (de degré $n+1$), $|e^{ixt}\, p_{n+1}(x)\, e^{-x^2/2}| \leq |p_{n+1}(x) e^{-x^2/2}|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comme la fonction $x \mapsto p_{n+1}(x) e^{-x^2/2}$ est intégrable (pour la même raison que $x \mapsto p_n(x)\, e^{-x^2/2}$ est intégrable), on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

On en déduit que $G^{(n)}$ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$G^{(n+1)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\, p_{n+1}(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$. C'est la propriété (P_{n+1}).

Donc, par récurrence sur n, (P_n) est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Ceci prouve que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car une fonction n fois dérivable quel que soit $n \in \mathbb{N}$ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$: chacune de ses dérivées successives est elle-même dérivable, donc continue).