Contrôle écrit n° 1

24 octobre 2017 – 1 h 30

L'énoncé comporte deux pages. Calculatrices, téléphones et documents interdits.
Un soin particulier devra être accordé à la rédaction, en privilégiant les mots par rapport aux symboles comme $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ *: une réponse sans mot ne sera pas comptabilisée.*

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner la définition d'une tribu $\mathscr{M}$ sur un ensemble X.
2. Donner la définition d'une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$.

Exercice 2 Soient $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$.

1. Montrer que
$$\mathscr{M}_A := \{B \cap A \,;\ B \in \mathscr{M}\}$$
est une tribu sur A.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} i: & A & \to & X \\ & a & \mapsto & i(a) = a \end{array}$$
est mesurable, lorsque A est muni de la tribu $\mathscr{M}_A$ et X de la tribu $\mathscr{M}$.
3. On suppose désormais que $A \in \mathscr{M}$. Montrer qu'alors
$$\mathscr{M}_A = \{C \in \mathscr{M} \,;\ C \subset A\}\,.$$
4. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{M})$. Montrer que la restriction de μ à $\mathscr{M}_A$ est une mesure sur l'espace mesurable $(A, \mathscr{M}_A)$.

Exercice 3 Soient $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to \mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants
$$A := \{x \in X \,;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ =\ +\infty\}\,,$$
$$B := \{x \in X \,;\ \text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\}$$
sont mesurables. *Indication :* écrire ces ensembles comme réunions et/ou intersections d'ensembles mesurables.

Exercice 4 Soient des fonctions f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, boréliennes. Démontrer en faisant appel à des résultats du cours que la fonction
$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) \ =\ f(x-y)\,g(y) \end{array}$$
est borélienne.

.../...

Exercice 5 Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) > 0$ et une fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$ mesurable (avec $\mathbb{R}^+$ muni de sa tribu borélienne).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'ensemble $A_n := \{x \in X\,;\ f(x) \leqslant n\}$. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille croissante (au sens de l'inclusion) d'ensembles mesurables.
2. En vous aidant de la question précédente, montrez qu'il existe un ensemble $A \in \mathscr{M}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.
3. En supposant $\mu(\{x \in X\,;\ f(x) > 0\}) > 0$, montrer qu'il existe $B \in \mathscr{M}$ tel que $\mu(B) > 0$ et f soit minorée par un réel $\beta > 0$ sur B.