Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Questions de cours

① Une tribu $\mathcal{M}$ sur un ensemble X est un ensemble de parties de X qui contient l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire et stable par réunion dénombrable.
Autrement dit, on a les trois propriétés suivantes :
i) $\emptyset \in \mathcal{M}$,
ii) pour tout $A \in \mathcal{M}$, $A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$,
iii) pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

② Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ est une application $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que
1) $\mu(\emptyset) = 0$,
2) pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints, on a $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Rappels : ∘ ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$.

$A \in \mathcal{M}$ signifie que A est un élément de $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ signifie que $\mathcal{M}$ est inclus dans (ou encore un sous-ensemble de) $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X.

$B \in \mathcal{P}(X)$ signifie que B appartient à l'ensemble des parties de X, ce qui équivaut à
$B \subset X$.

On appelle indifféremment partie ou sous-ensemble de X tout ensemble inclus dans X.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 2

Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$.

① Montrons que $\mathcal{M}_A = \{ B \cap A ;\ B \in \mathcal{M} \}$ est une tribu sur A.

Par définition, tout élément de $\mathcal{M}_A$ est de la forme $B \cap A$ avec $B \in \mathcal{M}$. Comme $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ et $A \subset X$, $B \cap A \in \mathcal{P}(X)$. Donc $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{P}(X)$.

i) On sait que $\emptyset \in \mathcal{M}$, puisque c'est une tribu, donc $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{M}_A$.

ii) soit $C = B \cap A \in \mathcal{M}_A$, avec $B \in \mathcal{M}$. Alors
$A \setminus C = \{ x \in A ;\ x \notin B \text{ ou } x \notin A \} = (X \setminus B) \cap A$.
Comme $\mathcal{M}$ est une tribu sur X, $X \setminus B \in \mathcal{M}$.
Donc $A \setminus C \in \mathcal{M}_A$.

iii) soit $C_n \in \mathcal{M}_A^{\mathbb{N}}$, avec $C_n = B_n \cap A$, $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cap A$.

Comme $\mathcal{M}$ est une tribu sur X, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$.
Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{M}_A$.

On a donc prouvé que $\mathcal{M}_A$ était une tribu sur A.

② Montrons que l'application $i : \begin{array}{l} A \longrightarrow X \\ a \longmapsto i(a) = a \end{array}$ est mesurable.

Soit $B \in \mathcal{M}$. Alors $i^{-1}(B) = \{ a \in A ;\ a \in B \}$
$= B \cap A \in \mathcal{M}_A$.

Ainsi on a pour tout $B \in \mathcal{M}$, $i^{-1}(B) \in \mathcal{M}_A$. ./..

Ceci prouve que i est mesurable.

③ On suppose $A \in \mathcal{M}$. Montrons que $\mathcal{M}_A = \{C \in \mathcal{M} ; C \subset A\}$.

Ceci équivaut à montrer que pour tout $C \in \mathcal{P}(X)$, on a ($C \in \mathcal{M}$ et $C \subset A$) si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}$ tel que $C = B \cap A$.

- si $B \in \mathcal{M}$ alors $B \cap A \in \mathcal{M}$ puisque $\mathcal{M}$ est une tribu et $A \in \mathcal{M}$, et $B \cap A \subset A$.
- Réciproquement, si $C \in \mathcal{M}$ et $C \subset A$ alors $C = C \cap A$.

Donc on a bien l'équivalence.

④ On suppose toujours $A \in \mathcal{M}$, de sorte que $\mathcal{M}_A = \{C \in \mathcal{M} ; C \subset A\}$ d'après la question précédente.

Si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ alors $\mu(\emptyset) = \emptyset$ et c'est donc vrai pour $\mu_A := \mu|_{\mathcal{M}_A}$ sa restriction à $\mathcal{M}_A$.

Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_A^{\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}_A$ disjoints deux à deux, alors ce sont des éléments de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux, donc
$$\mu_A\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(C_n).$$

Ceci prouve que μ_A est une mesure sur $(A, \mathcal{M}_A)$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 3

Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to \mathbb{R}$.

On veut montrer que les ensembles

$$A = \{x \in X \,;\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

$$B = \{x \in X \,;\, \text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

sont mesurables.

Soit $x \in X$. Alors la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si, par définition, pour tout $R \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n(x) \geq R$.

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$, ceci équivaut à : pour tout $P \in \mathbb{N}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n(x) \geq P$.

C'est en effet une condition nécessaire pour que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Elle est aussi suffisante, car si $R \in \mathbb{R}$, il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $P \geq R$ et donc, si l'on a $f_n(x) \geq P$ pour tout $n \geq N$, on a a fortiori $f_n(x) \geq R$ pour tout $n \geq N$.

Par suite, $x \in A$ si et seulement si, quel que soit $P \in \mathbb{N}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n(x) \geq P$.

Ainsi on a $A = \bigcap_{P\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}([P, +\infty[)$.

Comme f_n est mesurable, l'ensemble $f_n^{-1}([P, +\infty[)$ est mesurable puisque $[P, +\infty[$ est borélien, quelsque soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{N}$.

Donc d'après les propriétés de stabilité par réunion et intersection dénombrables des tribus, on a

$\bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}([P,+\infty[) \in \mathcal{M}$ quelsque soient $N \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{N}$,

d'où $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}([P,+\infty[) \in \mathcal{M}$ quelque soit $P \in \mathbb{N}$,

et finalement $A = \bigcap_{P \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}([P,+\infty[) \in \mathcal{M}$.

Le raisonnement est analogue pour montrer que $B \in \mathcal{M}$.

Soit $x \in X$. La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si

et seulement s'il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x)| \leq P$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on utilise là encore le fait que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$).

Par suite on a $B = \bigcup_{P \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-P,P])$.

Comme $[-P,P]$ est borélien, on a $f_n^{-1}([-P,P]) \in \mathcal{M}$ quels que soient $P \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
D'après les propriétés de stabilité des tribus par réunion et intersection dénombrables, on en déduit que $B \in \mathcal{M}$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 4

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boréliennes, et

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = f(x-y)g(y).$$

Notons $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto x$ $\quad$ $(x,y) \mapsto y$

les projections canoniques, qui sont boréliennes.

Alors $F = f \circ (P - Q) \cdot g \circ Q$ est borélienne

car la somme, le produit, et la composée de fonctions boréliennes sont boréliennes.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 5

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) > 0$ et une fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$ mesurable.

① Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble $A_n = \{x \in X ; f(x) \leq n\}$ $= f^{-1}(]-\infty, n])$ est mesurable car f est mesurable et $]-\infty, n]$ est borélien.
De plus, pour tout $x \in X$, $f(x) \leq n$ implique a fortiori $f(x) \leq n+1$. Ceci montre que $A_n \subset A_{n+1}$.

② Pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) \leq n$, puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}^+$.
Ceci montre que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

D'après la sous-additivité des mesures, on en déduit que $\mu(X) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Comme $\mu(X) > 0$ et $\mu(A_n) \in [0, +\infty]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ceci implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) > 0$.

Si on pose $A = A_{n_0}$, on a $0 \leq f(x) \leq n_0$ pour tout $x \in A$. Donc f est bornée sur A, et $\mu(A) > 0$.

③ Soit $C = \{x \in X ; f(x) > 0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{x \in X ; f(x) \geq \frac{1}{n+1}\}$.

Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset C$, et pour tout $x \in C$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) \geq \frac{1}{n+1}$, c'est-à-dire $x \in B_n$.

Donc $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et on conclut comme à la question ②.