Ex 6

2. (b) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ mais l'égalité n'est pas vraie

$$f : \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & 0 \\ y & \nearrow & 1 \\ z & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

$A_1 = \{x\}$

$A_2 = \{y\}$

$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$

mais $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0\} \neq \emptyset$.

Ex 6

2. (c) $f(A^c)$ et $f(A)^c$

$$f : \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & 0 \\ y & \nearrow & 1 \\ z & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

$A = \{x\}$

$A^c = \{y, z\}$

$f(A^c) = \{0, 2\}$ $\quad$ $f(A)^c = \{0\}^c = \{1, 2\}$

Ici, aucune inclusion n'est vraie entre eux.

Ex 9 1. (i) $\begin{array}{l} A \subset B \cup C \\ C \subset B \cup C \end{array} \iff A \setminus B \subset C$

(ii) $A \cap C \subset B \iff (A \setminus B) \cap C = \emptyset$

(iii) $\begin{array}{l} A \cap C = \emptyset \\ \text{et } B \cap C^c = \emptyset \end{array} \iff B \subset C \subset A^c$

2. $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$\quad C \longmapsto (A \cap C, B \cap C)$

(i) f est injective ssi $A \cup B = X$

si f est injective, notons que

$$f(X)=(A,B) \text{ et } f(A\cup B)=(A,B)$$

Donc, $X = A\cup B$

si $A\cup B=X$, supposons que pour C et C', on a

$$f(C)=f(C')$$

Alors, $A\cap C = A\cap C' \Rightarrow A\cap(C\setminus C')=\emptyset$ par (ii)

$B\cap C = B\cap C' \Rightarrow B\cap(C\setminus C')=\emptyset$

$$\Rightarrow (A\cup B)\cap(C\setminus C') = (A\cap(C\setminus C'))\cup(B\cap(C\setminus C'))=\emptyset$$

$$\Rightarrow X\cap(C\setminus C') = C\setminus C' = \emptyset$$

Similairement, $C'\setminus C=\emptyset$

Du coup, $C=C'$, Ceci dit que f est injective.

(ii) f est surjective ssi $A\cap B=\emptyset$

si f est surjective, alors $\exists\, C\subset X$ t.q.

$$f(C)=(A\cap C, B\cap C) = (\emptyset, B)$$

Cela implique que $C\subset A^c$ et $B\subset C$

Donc $B\subset A^c \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$.

si $A\cap B=\emptyset$, $\forall (E,F)\subset \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$, on prend $C=E\cup F\in\mathcal{P}(X)$

Notons que $A\cap C = (E\cup F)\cap A$

$=(E\cap A)\cup(F\cap A)$

$=E\cup\emptyset = E$ car $E\subset A$, $F\subset B\subset A^c$.

$B\cap C = B\cap(E\cup F)$

$=(B\cap E)\cup(B\cap F)$

$=\emptyset\cup F = F$ car $F\subset B$, $E\subset A\subset B^c$.

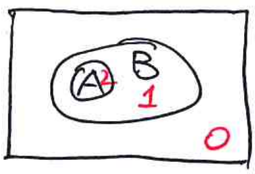
i.e. $f(C)=f(E\cup F)=(E,F)$ f est surjective

Soit $\# X = n$.

<u>Ex 12</u> 1.
$$\sum_{A\subset X} \# A = \sum_{A\subset X} \sum_{x\in X} \chi_A(x)$$
$$= \sum_{x\in X} \sum_{A\subset X} \chi_A(x)$$
$$= \sum_{x\in X} \underbrace{\text{Nb de parties de } X \text{ contenant } x}_{2^{n-1}}$$
$$= n \cdot 2^{n-1}$$

2.
$$\sum_{A,B\subset X} \#(A\cap B) = \sum_{A,B\subset X} \sum_{x\in X} \chi_{A\cap B}(x)$$
$$= \sum_{x\in X} \sum_{A,B\subset X} \chi_A(x)\chi_B(x)$$
$$= \sum_{x\in X} \Big(\sum_{A\subset X} \chi_A(x)\Big)^2$$
$$= n(2^{n-1})^2 = n\cdot 2^{2n-2}$$

3.
$$G : \{(A,B) : A,B\in \mathcal{P}(X) \text{ et } A\subset B\} \longrightarrow \{f : f : X\to\{0,1,2\} \text{ fonction}\}$$
$$(A,B) \longmapsto \chi_A + \chi_B$$



G est bijective.

G est surjective car $\forall f : X \to \{0,1,2\}$ on prend
$$A = f^{-1}(\{2\}) \quad \text{et} \quad B = f^{-1}(\{1,2\})$$
Alors $f = \chi_A + \chi_B$ et $A\subset B$

G est injective : si $G(A,B) = f = G(\tilde{A},\tilde{B})$
$$\chi_A + \chi_B = \chi_{\tilde{A}} + \chi_{\tilde{B}}$$
Alors $A = (\chi_A+\chi_B)^{-1}(\{2\}) = (\chi_{\tilde{A}}+\chi_{\tilde{B}})^{-1}(\{2\}) = \tilde{A}$, $B = \tilde{B}$.

$$\#\{(A,B) \mid A \subset B\} = \#\{f \mid f : X \to \{0,1,2\}\}$$
$$= 3^{\#X}$$

Ex14 (1) $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a $r = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$

alors $P(x) = bx - a$ a un zéro r.

Donc r est algébrique

(2)

Soit $\mathcal{P} := \{ P(x) \mid P(x)$ est un polynôme non-nul à coefficients dans $\mathbb{Z}\}$

En écrivant $P(x) \in \mathcal{P}$ de la forme

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on trouve une injection de $\mathcal{P}$ à

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{Z}^n$ qui est dénombrable

Donc $\mathcal{P}$ est dénombrable.

$$\{\text{Nb algébriques}\} = \bigcup_{P(x) \in \mathcal{P}} \underbrace{\{\text{zéros de } P(x)\}}_{\text{fini}}$$

est aussi dénombrable.