XIII

Chap. XIII - Espaces $\mathcal{L}^p$

① Espaces vectoriels $\mathcal{L}^p$ pour $p \in [1, +\infty[$

Etant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$, on a déjà défini $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ comme l'ensemble, qui se trouve être un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ intégrables (c'est-à-dire mesurables et telles que $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$).

Definition : Soit un réel $p \in [1, +\infty[$. On note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, voire $\mathcal{L}^p(X)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité) l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$.

Autrement dit, si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable, on a $f \in \mathcal{L}^p(X)$ si et seulement si $f^p \in \mathcal{L}^1(X)$.

Cas particulier : lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ et $\mu = \sigma$ la mesure de comptage sur X, on note $\ell^p(X)$ au lieu de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{P}(X), \sigma)$.

En particulier, si $X = \mathbb{N}$, $\ell^p(X)$ est l'ensemble des suites de puissance p-ième sommable.

Proposition : L'ensemble $\mathcal{L}^p(X)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de X dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : • bien sûr la fonction nulle est intégrable, donc elle appartient à $\mathcal{L}^p(X)$.

- si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}^p(X)$, alors αf est mesurable et $\int_X |\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p \underbrace{\int_X |f|^p d\mu}_{< +\infty}$.
  Donc $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X)$
- si $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$, alors $f+g$ est mesurable et $|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max(|f|, |g|))^p \leq 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$, donc $f+g \in \mathcal{L}^p(X)$ d'après la monotonie de l'intégrale. ▨

Attention, il n'y a pas d'ordre entre ces espaces en général.

Par exemple, la fonction $\left]0,1\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\left]0,1\right[)$ mais pas à $\mathcal{L}^2(\left]0,1\right[)$. Tandis que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Cependant, on peut ordonner les espaces $\mathcal{L}^p$ dans deux cas particuliers, et attention, pas dans le même sens.

Proposition : si $\mu(X) < +\infty$, si $p \leq q$ alors $\mathcal{L}^q(X,\mu) \subset \mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Par exemple, on a $\mathcal{L}^2(\left]0,1\right[) \subsetneq \mathcal{L}^1(\left]0,1\right[)$.

Démonstration : si $f \in \mathcal{L}^q(X,\mu)$ et $p \leq q$ alors

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_{X \cap \{x \in X;\, |f(x)| \leq 1\}} |f|^p \, d\mu + \int_{X \cap \{x \in X;\, |f(x)| > 1\}} |f|^p \, d\mu \leq \mu(X) + \int_X |f|^q \, d\mu < +\infty.$$

$\blacksquare$

Proposition : si $p \leq q$ alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.

Démonstration : si $f \in \ell^p(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty$, avec $u_n := f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors nécessairement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro. Par suite, si $p \leq q$ on a $|u_n|^q = O(|u_n|^p)$.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty$ par comparaison. Ceci signifie que $f \in \ell^q(\mathbb{N})$.

$\blacksquare$

On remarque de plus que, là encore, les inclusions sont strictes.

Par exemple, $f : n \mapsto \frac{1}{n+1}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ mais pas à $\ell^1(\mathbb{N})$.

XIII

② Inégalités fondamentales

Lemme : quels que soient $u, v \in [0, +\infty]$, $\alpha \in]0,1[$ on a
$u^\alpha v^{1-\alpha} \leqslant \alpha u + (1-\alpha) v$, avec égalité si et seulement si ($u = +\infty$ ou $v = +\infty$ ou $u = v$).

Démonstration : • l'inégalité est évidente si $u = 0$ ou $v = 0$.
• si $u = +\infty$ ou $v = +\infty$ on a l'égalité (les deux membres valent $+\infty$), si $u = v = 0$ on a aussi l'égalité (les deux membres valant 0).
• soient $u, v \in]0, +\infty[$: l'inégalité s'écrit encore

$$e^{\alpha \ln u + (1-\alpha)\ln v} \leqslant \alpha e^{\ln u} + (1-\alpha) e^{\ln v}.$$

Or la fonction exponentielle est strictement convexe, ce qui implique :
quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$, $e^{\alpha x + (1-\alpha) y} \leqslant \alpha e^x + (1-\alpha) e^y$,
avec égalité pour $\alpha \in]0,1[$ si et seulement si $x = y$.
D'où le résultat en posant $x = \ln u$ et $y = \ln v$, sachant que $\ln$ est bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et donc $x = y$ équivaut à $u = v$. ☒

Théorème (inégalité de Hölder)
Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit que p et q sont conjugués)
Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ et

$$\int_X |fg| \, d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

L'inégalité est une égalité si et seulement s'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\gamma |f|^p = \delta |g|^q$ μ-presque partout.

Démonstration : On pose $I = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ et $J = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}$.

Si $IJ = 0$ c'est que $f = 0$ μ-presque partout ou $g = 0$ μ-presque partout : dans ce cas l'inégalité est une égalité, les deux membres étant nuls.
Supposons désormais $IJ \neq 0$. Pour tout $x \in X$, on peut appliquer le

lemme à $u = \frac{|f(x)|^p}{I^p}$ et $v = \frac{|g(x)|^q}{J^q}$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $1-\alpha = \frac{1}{q}$.

Ceci donne l'inégalité :

$$\frac{|f(x)\,g(x)|}{I\,J} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{I^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{J^q}.$$

En intégrant, on en déduit par monotonie et homogénéité de $\int$

$$\frac{1}{IJ}\int_X |fg|\,d\mu \leq \frac{1}{p\,I^p}\int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q\,J^q}\int_X |g|^q d\mu = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

D'où $\int_X |fg|\,d\mu \leq IJ$, l'inégalité qu'il fallait démontrer.

En cas d'égalité on a $\frac{|f(x)|^p}{I^p} = \frac{|g(x)|^q}{J^q}$ μ-presque partout, d'après le cas d'égalité du lemme. $\boxtimes$

<u>Notation</u>: si $f \in \mathcal{L}^p(X)$ on pose $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Attention, c'est pour l'instant juste une notation. En particulier, on a $\|f\|_p = 0$ si $f = 0$ μ-presque partout, donc $\|.\|_p$ peut au mieux être une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X)$.

L'inégalité de Hölder a un cas particulier remarquable, énoncé ci-dessous.

<u>"Corollaire"</u> (inégalité de Cauchy-Schwarz) :

si $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$ alors $f\bar{g} \in \mathcal{L}^1(X)$ et $\left|\int_X f\bar{g}\,d\mu\right| \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$,

avec égalité si et seulement s'il existe $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\gamma|f| = \delta|g|$ p.p.

En effet, $\left|\int_X f\bar{g}\,d\mu\right| \leq \int_X |fg|\,d\mu$ et il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder dans le cas $p = q = 2$. $\boxtimes$

L'inégalité de Hölder a de multiples conséquences, qui pourront être vues en TD. L'une d'elles est capitale, puisqu'elle permet de montrer que $\|.\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X)$.

XIII **Théorème** (inégalité de Minkowski)

si $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ avec $p \in [1, +\infty[$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Démonstration : • le cas $p = 1$ a déjà été vu au chapitre IX.

• supposons $p \in]1, +\infty[$. On a $|f+g|^p \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$.

Soit $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p. Alors d'après l'inégalité de Hölder :

$$\int_X |f|\,|f+g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$\int_X |g|\,|f+g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

d'où en additionnant :

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Si jamais $\|f+g\|_p = 0$, l'inégalité $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ est vraie.

Sinon on peut diviser l'inégalité ci-dessus par $\|f+g\|_p^p$ et on en déduit $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ ☒

Corollaire : $\|.\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X)$.

Attention à ne pas oublier la puissance $\frac{1}{p}$ dans la définition de $\|.\|_p$: sinon l'homogénéité serait fausse.

En général, $\|.\|_p$ n'est qu'une semi-norme. Cependant, c'est une norme sur $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ et $\mu = \sigma$ la mesure de comptage :

$\ell^p(X)$ est un espace vectoriel normé. En effet, si $\int_X |f|^p d\sigma = 0$ alors $f = 0$ σ-presque partout et donc $f = 0$ partout puisque tout ensemble A non vide est de mesure $\sigma(A) > 0$.

③ Espaces vectoriels normés L^p pour $p \in [1, +\infty[$

Etant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ on peut lui associer la relation d'équivalence $\sim$ définie sur l'espace vectoriel des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ par $f \sim g$ si $f = g$ μ-presque partout.

On peut alors quotienter $\mathcal{L}^p(X)$ par $\sim$ en ne considérant que les classes de fonctions modulo $\sim$. Ceci revient à identifier les fonctions qui coïncident presque partout. On obtient encore un espace vectoriel.

On définit ainsi l'espace $L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)/_\sim$.

En toute rigueur, $L^p(X)$ est constitué de classes de fonctions $\dot{f} = \{ g \in \mathcal{L}^p(X) \, ; \, g = f \ \mu\text{-presque partout} \}$. En pratique, on fait comme si f était un élément de $L^p(X)$.

Par ailleurs, si $g = f$ μ-presque partout, on a $\|g\|_p = \|f\|_p$. Donc $\|\cdot\|_p$ est définie sans ambiguïté sur $L^p(X)$, et elle en fait un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.

<u>Théorème (admis) de Riesz-Fischer :</u> Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans cet espace vectoriel normé est convergente.

Rappelons que par définition une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_p$ si :

quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$; $n \geq N$, $m \geq N$, on a $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$.

La démonstration de ce théorème repose sur le fait que $\mathbb{C}$ est un espace métrique complet, sur le théorème de convergence monotone et l'inégalité de Minkowski.

Cas particulier : lorsque $p=2$, on a même un espace de Hilbert.

En effet, le crochet $\langle f,g\rangle = \int_X f\,\bar{g}\,d\mu$ définit un produit hermitien (il est sesquilinéaire, défini positif) sur $L^2(X)$ associé à la norme $\|\cdot\|_2$:

$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ (où l'on voit l'importance de ne pas oublier la conjugaison complexe dans la définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Ceci vient de la linéarité de l'intégrale et du fait que $\langle f,f\rangle = 0$ implique $|f|^2=0$ μ-presque partout, et donc aussi $f=0$ μ-presque partout.

④ Espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞

Soit à nouveau un espace mesuré $(X,\mathcal{M},\mu)$. On suppose $\mu(X)>0$.

Définition : Soit une fonction $f : X \to]-\infty,+\infty]$. On dit que $M \in]-\infty,+\infty]$ est un majorant essentiel de f si $\{x\in X;\ f(x)>M\}$ est négligeable.

Lemme : L'ensemble des majorants essentiels d'une fonction de X dans $]-\infty,+\infty]$ est un intervalle fermé de la forme $[m,+\infty]$, $m \in]-\infty,+\infty]$.

Démonstration : • comme $\{x\in X;\ f(x)>+\infty\} = \emptyset$, $+\infty$ est un majorant essentiel de f.

• Si M est un majorant essentiel de f, si $M' \geq M$ alors $\{x\in X;\ f(x)>M'\} \subset \{x\in X;\ f(x)>M\}$. Ce dernier étant négligeable, le premier aussi. Donc M' est un majorant essentiel de f.

• Supposons l'ensemble des majorants essentiels de f non minoré dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un majorant essentiel $M \leq -n$, donc n est un majorant essentiel : $B_n = \{x\in X;\ f(x)>-n\}$ est négligeable. Donc $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est négligeable, ce qui contredit $\mu(X)>0$.

• L'ensemble des majorants essentiels admet donc une borne inférieure m dans $]-\infty,+\infty]$. Si $m=+\infty$, c'est que cet ensemble est $\{+\infty\}=[+\infty,+\infty]$.
Si $m<+\infty$, on a alors $\{x\in X ;\, f(x)>m\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X ;\, f(x)>m+\frac{1}{n+1}\}$.
Or par définition d'une borne inférieure, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un majorant essentiel $M\leqslant m+\varepsilon$, et donc $m+\varepsilon$ est un majorant essentiel.
C'est le cas en particulier pour $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, donc $\{x\in X ;\, f(x)>m+\frac{1}{n+1}\}$ est négligé.
Donc $\{x\in X ;\, f(x)>m\}$ est négligeable comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables. ☒

<u>Définition</u> : si $f : X\to]-\infty+\infty]$, on définit sa **borne supérieure essentielle** $\sup\mathrm{ess}_X f$ comme le plus petit de ses majorants essentiels.
Si $f : X\to\mathbb{C}$, on dit qu'elle est **essentiellement bornée** si $\sup\mathrm{ess}_X |f|<+\infty$.
Dans ce cas, on note $\|f\|_\infty := \sup\mathrm{ess}_X |f|$.

<u>Remarque</u>: si $f : X\to\mathbb{C}$ est bornée alors elle est essentiellement bornée. En effet, tout majorant de $|f|$ est un majorant essentiel, donc il est supérieur à $\sup\mathrm{ess}_X |f|$, qui est donc finie, et
On a de plus $\sup_X |f| \geqslant \|f\|_\infty$.
Attention, cette inégalité peut être stricte. Par exemple pour $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, $\sup_{\mathbb{R}} |f| = 1$ et $\|f\|_\infty=0$.

<u>Proposition</u> : si $f : X\to\mathbb{C}$ est mesurable bornée, il existe $g : X\to\mathbb{C}$ mesurable bornée, coïncidant μ-presque partout avec f et telle que $\|g\|_\infty = \sup_X |g| = \|f\|_\infty$.

<u>Démonstration</u> : $N := \{x\in X ;\, |f(x)|>\|f\|_\infty\}$ est mesurable de mesure nulle.
Il suffit donc de poser $g=\mathbb{1}_{X\setminus N}\, f$: $\|g\|_\infty=\|f\|_\infty$ puisque f et g

coïncident presque partout, et $\|f\|_\infty$ est un majorant de $|g|$ par définition de g, donc $\sup_X |g| \leq \|f\|_\infty$.

On a ainsi $\|g\|_\infty \leq \sup_X |g| \leq \|f\|_\infty = \|g\|_\infty$, d'où l'égalité. ▨

Définition : On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ ou $\mathcal{L}^\infty(X)$) l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables essentiellement bornées.

Proposition: L'ensemble $\mathcal{L}^\infty(X)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de X dans $\mathbb{C}$, sur lequel $\|.\|_\infty$ définit une semi-norme. L'ensemble $L^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X)/\sim$ est un espace vectoriel normé pour $\|.\|_\infty$.

Démonstration : • La fonction nulle appartient à $\mathcal{L}^\infty(X)$. Si $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$,

- si $\|f\|_\infty = 0$ alors $\{x \in X ; |f(x)| > 0\}$ est négligeable et donc $f = 0$ μ-presque partout, ce qui signifie que la classe de f dans $L^\infty(X)$ est nulle,
- si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$ (vérification laissée en exercice),
- si $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$, soit $N = \{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_\infty \text{ ou } |g(x)| > \|g\|_\infty\}$: c'est un ensemble mesurable de mesure nulle et $|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pour tout $x \in X \setminus N$. Donc $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

▨

Proposition : l'inégalité de Hölder est vraie aussi avec $p = 1$ et $q = \infty$, c'est-à-dire que si $f \in \mathcal{L}^1(X)$ et $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ alors $\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Ceci résulte directement de la monotonie de l'intégrale, puisque $|fg| \leq \|g\|_\infty |f|$ μ-presque partout.

Théorème : Tout comme les espaces $(L^p(X), \|.\|_p)$, avec $p < +\infty$, l'espace $(L^\infty(X), \|.\|_\infty)$ est complet au sens de la topologie : toute suite de Cauchy dans cet espace est convergente dans ce même espace.

Démonstration : elle est un peu plus directe que pour $p < +\infty$ (théorème de Riesz-Fischer, que l'on a admis). Il faut démontrer le fait suivant :
si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^\infty(X)^{\mathbb{N}}$ est telle que :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, $m \geq N$, on ait $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$,
alors il existe $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ telle que $\|f_n - g\|_\infty$ tend vers zéro quand $n \to \infty$.
L'ingrédient principal de la démonstration va être le fait que $\mathbb{C}$ (l'ensemble d'arrivée des fonctions f_n) est complet, c'est-à-dire que toute suite complexe de Cauchy est convergente.
Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^\infty(X)^{\mathbb{N}}$ vérifiant le critère de Cauchy ci-dessus.
Par définition de $\|.\|_\infty$, les ensembles $A_n := \{x \in X ; |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$ et $A_{n,m} := \{x \in X ; |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$, pour $n, m \in \mathbb{N}$, sont négligeables ; ils sont même mesurables de mesure nulle, puisque les fonctions f_n et $f_n - f_m$ sont mesurables.
Donc $B = X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}}} A_{n,m} \right)$ est aussi mesurable et son complémentaire est de mesure nulle.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = \mathbb{1}_B \times f_n$. Alors $\|g_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ et $\|g_n - g_m\|_\infty = \|f_n - f_m\|_\infty$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, et $\|g_n - g_m\|_\infty = \sup_{x\in X} |g_n(x) - g_m(x)|$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy sur la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ et $m \geqslant N$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, ce qui implique que pour tout $x \in X$, $|g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon$.
Puisque $\mathbb{C}$ est complet, on en déduit que la suite $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe que l'on note $g(x)$.
En faisant tendre m vers ∞ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geqslant N$, ce rang N ne dépendant pas de x, donc $\sup\limits_{x \in X} |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ ce qui implique $\|g_n - g\|_\infty \leq \varepsilon$, puisque $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ aussi (on a $\|g\|_\infty \leqslant \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$).
Comme $f_n = g_n$ μ-presque partout, on a donc $\|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

$\boxtimes$

⑤ Approximation des fonctions de $L^p(X)$, lorsque $p \in [1, +\infty[$.

Proposition : soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, soit $p \in [1, +\infty[$.
L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$: pour montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^p(X)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, il suffit de pouvoir le montrer pour f à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, car alors on pourra appliquer ce résultat à $(\mathrm{Re} f)_+$, $(\mathrm{Re} f)_-$, $(\mathrm{Im} f)_+$, $(\mathrm{Im} f)_-$ et en déduire ce même résultat pour f, puisque pour toute fonction g (et en particulier $f_n - f$), $\|g\|_p \leq \|(\mathrm{Re} g)_+\|_p + \|(\mathrm{Re} g)_-\|_p + \|(\mathrm{Im} g)_+\|_p + \|(\mathrm{Im} g)_-\|$, d'après l'inégalité de Minkowsky.

Supposons donc $f : X \to \mathbb{R}^+$, $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Il existe une suite croissante de fonctions étagées mesurables $f_n : X \to \mathbb{R}^+$ telle que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$, quel que soit $x \in X$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ tels que $X_n \subset X_{n+1}$ et $\mu(X_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n = f_n \mathbb{1}_{X_n}$.
Alors φ_n est étagée et intégrable, puisque f_n est étagée donc bornée et $\mu(X_n) < +\infty$. De plus, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers f :

- pour tout $x \in X$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x \in X_n$, d'où $\varphi_n(x) = f_n(x)$, et donc $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ puisque $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.
- pour tout $x \in X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ et $0 \leq \mathbb{1}_{X_n}(x) \leq \mathbb{1}_{X_{n+1}}(x)$ puisque $X_n \subset X_{n+1}$, donc $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$.

Par suite, $|f - \varphi_n|^p = (f - \varphi_n)^p \leq (f - \varphi_0)^p$, qui est intégrable puisque $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et φ_0^p est intégrable pour la même raison que φ_0.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(|f - \varphi_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$.
On en déduit que $\int_X |f - \varphi_n|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire aussi $\|f - \varphi_n\|_p \to 0$.

$\boxtimes$

Lorsque $X = \mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue, on peut en dire un plus plus.

<u>Corollaire</u> : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des ouverts $(U_j)_{1\leq j\leq m}$ de mesure finie (et $m \in \mathbb{N}^*$) tels que $\| f - \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{U_j} \|_p \leq \varepsilon$.

La démonstration utilise le résultat précédent et la régularité extérieure de la mesure de Lebesgue. Elle est laissée en exercice.

<u>Théorème</u> : L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, si $p \in [1, +\infty[$.

XIII

Pour $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, on définit son support comme l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R}^d ;\ f(x) \neq 0\}$.

La démonstration du théorème repose sur le corollaire précédent et le résultat de topologie suivant.

Lemme d'Urysohn : si $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ avec K compact et U ouvert, il existe une fonction continue valant 1 sur K et à support inclus dans U.

Attention, ce théorème n'est pas valable pour $p = +\infty$. En effet, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ contient des (classes de) fonctions non-continues (par exemple les fonctions indicatrices). Or, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues tendant vers f dans L^∞, quitte à modifier les f_n sur un ensemble négligeable, on voit que f devrait coïncider presque partout avec une fonction continue (obtenue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues) : ceci n'est pas possible par exemple si f est une fonction de Heaviside (ie valant 0 sur $\mathbb{R}^-$ et 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$: $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}$)

Un premier exemple d'application de ce théorème d'approximation est le suivant.

Proposition : Soit $p \in [1, +\infty[$, soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $f(\cdot + x)$ la fonction translatée, qui à $y \in \mathbb{R}^d$ associe $f(x+y)$. Alors on a $\| f(\cdot + x) - f \|_p \longrightarrow 0$ quand $x \to 0$.

Attention, cette proposition n'est pas valable pour $p = +\infty$. Par exemple pour $f = H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}$, pour tout $x \neq 0$ on a $\| f(\cdot + x) - f \|_\infty = 1$, ce qui ne peut pas tendre vers 0 !

Démonstration : • on commence par traiter le cas plus facile où f est continue à support compact K. Si $\|x\| \leq 1$ alors $f(\cdot + x)$ est à support dans $K_1 = K + B_1$, B_1 désigne la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

De plus, par continuité de f, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $|f(y+x) - f(y)|^p \to 0$ quand $x \to 0$, et $|f(y+x) - f(y)|^p \leq 2 \max |f| \, \mathbb{1}_{K_1}(y)$.

Comme $\mathbb{1}_{K_1}$ est intégrable puisque K_1 est borné, on peut appliquer le théorème de convergence dominée : $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y+x) - f(y)|^p dy \to 0$ quand $x \to 0$, ou encore $\|f(\cdot + x) - f\|_p \to 0$.

• grâce à ce cas particulier et au théorème d'approximation, on peut démontrer le résultat dans le cas général.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. D'où par l'inégalité triangulaire et l'invariance de $\|\cdot\|_p$ par translation : $\|f(\cdot + x) - f\|_p \leq \|f(\cdot + x) - g(\cdot + x)\|_p + \|g(\cdot + x) - g\|_p$

$$+ \|g - f\|_p \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|g(\cdot + x) - g\|_p .$$

D'après l'étape 1, il existe $r > 0$ tel que pour $\|x\| \leq r$, $\|g(\cdot + x) - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$, d'où $\|f(\cdot + x) - f\|_p \leq \varepsilon$. $\square$