XII

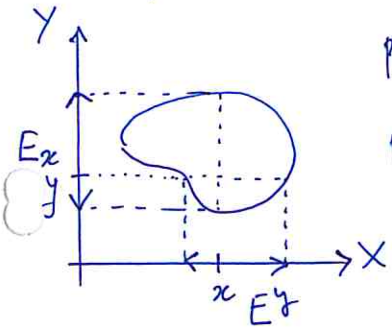
Chap. XII : Intégrales multiples

D'un point de vue abstrait, lorsque $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sont deux espacés mesurés, on voudrait pouvoir définir une intégrale au sens de Lebesgue sur le produit cartésien $X \times Y$ qui soit reliée aux intégrales sur X par rapport à μ et sur Y par rapport à ν.

① Mesure produit

On rappelle que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ désigne la tribu produit de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$: elle est par définition engendrée par les rectangles mesurables (ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$) et c'est la plus petite tribu qui rende mesurables les projections canoniques de $X \times Y$ sur X et de $X \times Y$ sur Y.

a) Compléments concernant la tribu produit



Proposition : si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ alors,

pour tout $x \in X$, $E_x := \{ y \in Y ;\ (x,y) \in E \} \in \mathcal{N}$,

pour tout $y \in Y$, $E^y := \{ x \in X ;\ (x,y) \in E \} \in \mathcal{M}$.

Autrement dit, les tranches d'ensembles mesurables sont mesurables.

---

idée de la démonstration (laissée en exercice) :

Pour $x \in X$ fixé, montrer que $\mathcal{N}_x := \{ E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} ;\ E_x \in \mathcal{N} \}$ est une tribu (facile). Comme elle contient les rectangles mesurables (si $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$, $(A \times B)_x = \emptyset$ si $x \notin A$, B si $x \in A$), elle est alors nécessairement égale à $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

<u>Proposition</u> : si $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ est mesurable lorsque $X \times Y$ est muni de la tribu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ alors,

pour tout $x \in X$ la fonction $f_x : \begin{array}{l} Y \to \mathbb{C} \\ y \mapsto f(x,y) \end{array}$ est mesurable,

pour tout $y \in Y$, la fonction $f^y : \begin{array}{l} X \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x,y) \end{array}$ est mesurable.

Autrement dit, les applications partielles associées à une fonction mesurable sont mesurables.

En effet, si C est un borélien de $\mathbb{C}$, si $x \in X$,

$$f_x^{-1}(C) = \{ y \in Y ;\ f(x,y) \in C \} = \{ y \in Y ;\ (x,y) \in f^{-1}(C) \}$$
$$= \left(f^{-1}(C)\right)_x ,$$ avec la notation de la proposition précédente.

Puisque f est mesurable, $f^{-1}(C)$ est mesurable, donc la tranche $\left(f^{-1}(C)\right)_x$ aussi. Ceci montre que f_x est mesurable.

Il en va de même pour la mesurabilité de f^y. ☒

b) Résultats préliminaires

<u>Définition</u> : Un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dit σ-fini s'il existe une suite croissante d'ensembles mesurables X_n telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, avec $\mu(X_n) < +\infty$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue est σ-fini : $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n,n]^d$, $\lambda_d([-n,n]^d) = (2n)^d < +\infty$.

<u>Proposition</u> (admise) : si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sont σ-finis alors il existe au plus une mesure η sur $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ telle que pour tout $A \times B$ avec $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$, on ait $\eta(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

Proposition (admise) : Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sont des espaces mesurés σ-finis, alors pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ les fonctions

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ x & \longmapsto & \nu(E_x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} Y & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ y & \longmapsto & \mu(E^y) \end{array}$$

sont mesurables et

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ E & \longmapsto & \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ E & \longmapsto & \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y) \end{array}$$

définissent des mesures sur l'espace mesurable $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$.

c) Définition de la mesure produit

Théorème (admis) : Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ des espaces mesurés σ-finis. Alors il existe une unique mesure η sur $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ qui vérifie $\eta(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$.
De plus, on a pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$,

$$\eta(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

La mesure η est appelée **mesure produit** de μ et ν, et notée $\mu \otimes \nu$.

Ce théorème ainsi que les résultats préliminaires du paragraphe précédent se démontrent grâce à la notion de **classe monotone**, les tribus étant des cas particuliers de classes monotones.

② Intégration sur un espace produit

Si $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ est mesurable, son intégrale par rapport à $\mu \otimes \nu$ est définie par la théorie générale de l'intégrale au sens de Lebesgue.

Par ailleurs, les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ à y fixé et $y \mapsto f(x,y)$ à x fixé, étant mesurables, on peut définir les fonctions

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ x & \longmapsto & \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} Y & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ y & \longmapsto & \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \end{array}$$

Si ces dernières sont mesurables, on peut se demander quel est le lien entre

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y)\ ,\quad \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) \text{ et}$$

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y).$$ La réponse est fournie par le résultat fondamental suivant.

Théorème de Tonelli : si $(X,\mathcal{M},\mu)$ et $(Y,\mathcal{N},\nu)$ sont des espaces mesurés σ-finis, si $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ est mesurable alors les fonctions

$g : X \to [0,\infty]$ et $h : Y \to [0,+\infty]$

$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ $\qquad$ $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont mesurables et

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Démonstration : • on commence par traiter le cas où $f = \mathbb{1}_E$ avec $E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Alors on a, pour tout $(x,y)\in X\times Y$, $f(x,y) = \mathbb{1}_{E_x}(y) = \mathbb{1}_{E^y}(x)$, d'où

$g(x) = \nu(E_x)$, $h(y) = \mu(E^y)$. Donc g et h sont mesurables et

$$(\mu\otimes\nu)(E) = \int_X g(x)\,d\mu(x) = \int_Y h(y)\,d\nu(y)$$ d'après le théorème du §c.

• Par additivité et homogénéité de l'intégrale, ceci implique le résultat pour toute fonction mesurable étagée.

• Si f est mesurable quelconque, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées mesurables $X\times Y \to \mathbb{R}^+$ qui tend vers f. En posant $g_n(x) = \int_Y f_n(x,y)\,d\nu(y)$, $h_n(y) = \int_X f_n(x,y)\,d\mu(x)$, on obtient des fonctions mesurables telles que $$\int_{X\times Y} f_n(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X g_n(x)\,d\mu(x) = \int_Y h_n(y)\,d\nu(y)$$ pour tout n, d'après le cas précédent.

De plus, par monotonie de l'intégrale, les suites (g_n) et (h_n) sont croissantes. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone aux trois intégrales, après avoir observé que g_n tend vers g, mesurable, et h_n tend vers h, mesurable, d'après ce même théorème de convergence monotone. ▨

<u>Corollaire</u>: Une fonction $f: X\times Y \to \mathbb{C}$ mesurable est intégrable si et seulement si l'une quelconque des trois conditions suivantes est satisfaite:

1) $$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) < +\infty$$

2) $$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty$$

3) $$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < +\infty.$$

"<u>Exemple</u>": si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont boréliennes intégrables, alors d'après le théorème de Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)\, g(y)|\, d(\lambda_1\otimes\lambda_1)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, d\lambda_1(x) \right) |g(y)|\, d\lambda_1(y)$$

$$\underset{(*)}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(z)|\, d\lambda_1(z) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, d\lambda_1(y) \right) < +\infty.$$

(*) en utilisant l'invariance par translation de λ_1.

Donc la fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est intégrable par rapport à $\lambda_1\otimes\lambda_1$, dont on peut voir qu'elle coïncide avec λ_2 sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

en effet, si $P = [a,b] \times [c,d]$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$,

$\lambda_2(P) = (b-a)(d-c)$ par définition de λ_2 et

$(\lambda_1\otimes\lambda_1)(P) = \lambda_1([a,b]) \cdot \lambda_1([c,d])$ par définition de $\lambda_1\otimes\lambda_1$.

$= (b-a)\cdot(d-c)$.

XII

Théorème de Fubini : Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sont des espaces mesurés σ-finis, si $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable alors :

* pour μ presque tout $x \in X$, la fonction $f_x : \begin{array}{l} Y \longrightarrow \mathbb{C} \\ y \longmapsto f(x,y) \end{array}$ est intégrable,
* pour ν presque tout $y \in Y$, la fonction $f^y : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto f(x,y) \end{array}$ est intégrable,
* la fonction g définie μ-presque partout par $g(x) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ et la fonction h définie ν-presque partout par $h(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sont intégrables,
* on a :

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Démonstration : d'après le théorème de Tonelli on a

$$+\infty > \int_{X \times Y} |f(x,y)|\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Donc on a $\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) < +\infty$ pour μ-presque tout x,

$\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) < +\infty$ pour ν-presque tout y.

Sachant que f_x et f^y sont mesurables, ceci implique qu'elles sont intégrables, respectivement pour μ-presque tout x et pour ν-presque tout y.
On peut ainsi bien définir $g(x) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ pour μ-presque tout x et $h(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ pour ν-presque tout y.
Ce sont des fonctions mesurables car, par exemple, $g(x) = \int_Y u_+(x,y)\, d\nu(y) - \int_Y u_-(x,y)\, d\nu(y) + i \int_Y v_+(x,y)\, d\nu(y) - i \int_Y v_-(x,y)\, d\nu(y)$ avec

XII

$u_+ = (\mathrm{Re} f)_+$, $u_- = (\mathrm{Re} f)_-$, $v_+ = (\mathrm{Im} f)_+$, $v_- = (\mathrm{Im} f)_-$.

On sait que ces fonctions sont mesurables et donc d'après le théorème de Tonelli les fonctions $x \mapsto \int_Y u_+(x,y)\, d\nu(y)$, ... sont mesurables, donc g aussi (elle est définie comme combinaison linéaire de ces intégrales sur $A = \{x \in X ;\ u_+, u_-, v_+, v_- \text{ intégrables par rapport à } \nu \text{ à } x \text{ fixé}\}$, et A est mesurable).

De plus, le théorème de Tonelli appliqué à u_+, u_-, v_+ et v_- ainsi que la linéarité de l'intégrale impliquent l'égalité voulue :

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f \, d\mu \right) d\nu. \quad \blacksquare$$

Le théorème de Fubini est un outil puissant pour intervertir l'ordre d'intégration sur un espace produit. Il faut cependant prendre garde à bien vérifier les hypothèses.

Considérons par exemple
$$f : \ ]0,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Elle est continue donc borélienne.

Cependant elle n'est pas intégrable et l'interversion de l'ordre d'intégration donne des résultats différents :

- $\displaystyle\int_{]0,1[} f(x,y)\, d\lambda_1(y) = \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{1+x^2}$, $\displaystyle\int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} f(x,y)\, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
- Comme $f(x,y) = -f(y,x)$, on a $\displaystyle\int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} f(x,y)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) = -\frac{\pi}{4}$.
- $\displaystyle\int_{]0,1[^2} f_+(x,y)\, d(\lambda_1\otimes\lambda_1)(x,y) = \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,x[} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x)$ d'après le théorème de Tonelli, soit $\displaystyle \ldots = \int_{]0,1[} \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^x d\lambda_1(x) = \int_{]0,1[} \frac{d\lambda_1(x)}{2x} = +\infty$.

③ Questions de complétude

Rappelons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et plus généralement $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On montre aussi de la même manière que quels que soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $d = p+q$,

$$\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).}$$

Rappelons aussi que la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour la mesure de Lebesgue λ_d. Si on note cette tribu $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$ (car $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ introduirait une confusion avec l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$), une question naturelle est de savoir si $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^q)$ est égale à $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$. La réponse est non !

<u>Proposition</u> (admise) : Si $d = p+q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) \subsetneq \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^q) \subsetneq \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d) = \left(\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^q)\right)^*.$$

À cause de cela, il est parfois utile d'avoir recours aux variantes suivantes des théorèmes d'interversion.

<u>Théorème de Fubini-Tonelli</u> (admis) : Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ des espaces mesurés σ-finis et complets. On note $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^*$ et $(\mu \otimes \nu)^*$ la tribu et la mesure complétées de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ et $\mu \otimes \nu$.

- si $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ est $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^*$-mesurable alors pour μ-presque tout $x \in X$, f_x est $\mathcal{N}$-mesurable, pour ν-presque tout $y \in Y$, f^y est $\mathcal{M}$-mesurable, les fonctions g et h définies respectivement μ-presque partout et ν-presque partout par $g(x) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ et $h(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sont mesurables et

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)^*(x,y) = \int_X g(x)\, d\mu(x) = \int_Y h(y)\, d\nu(y). \qquad (E)$$

- si $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ est $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^*$-mesurable et intégrable, alors pour μ-presque tout $x \in X$, f_x est intégrable, pour ν-presque tout $y \in Y$, f^y est intégrable, $g : x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ et $h : y \longmapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sont intégrables et on a (E).

Pour revenir à $\mathbb{R}^d$, on note λ_d la mesure de Lebesgue aussi bien sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ que sur $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$. Si $d=p+q$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\boxed{\lambda_d = \lambda_p \otimes \lambda_q.}$$

<u>Notation:</u> si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est intégrable (au sens de Lebesgue), on note indifféremment $\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\dots,x_d)\,dx_1\dots dx_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$

<u>Application du théorème de Tonelli au calcul de la mesure de la boule unité:</u>

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$: $\|x\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_d^2}$, pour tout $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$.

On veut calculer $\omega_d := \lambda_d\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d ; \|x\|\leq 1\right\}\right)$.

Par exemple, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$ (on rappelle que λ_d est construite pour généraliser les notions de longueur, aire, volume...).

Par homogénéité, on a $\lambda_d\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d ; \|x\|\leq r\right\}\right) = r^d\omega_d$, quel que soit $r\in\mathbb{R}^+$.

Pour calculer ω_d, on considère
$$f : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,t) \longmapsto e^{-t}\mathbb{1}_{B_{\sqrt{t}}}(x),$$
où $B_r := \left\{x\in\mathbb{R}^d ; \|x\|\leq r\right\}$.

On remarque que $\mathbb{1}_{B_{\sqrt{t}}}(x) = \mathbb{1}_D(x,t)$, $D := \left\{(x,t) ; \|x\|^2\leq t\right\}$, borélien puisqu'image réciproque du fermé $\mathbb{R}^+$ par $(x,t)\mapsto t-\|x\|^2$, continue.

Donc f est borélienne comme produit de fonctions boréliennes.

D'après le théorème de Tonelli on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} f(x,t)\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\,dt}_{\int_{\|x\|^2}^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-\|x\|^2}}\Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^+}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x,t)\,dx}_{e^{-t}\lambda_d(B_{\sqrt{t}}) = e^{-t}\omega_d\sqrt{t}^{\,d}.}\Big)\,dt$$

Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du\right)^d = \pi^{d/2}$,

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{-t}\,t^{d/2}\,dt = \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)$. Donc $\omega_d = \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

④ Changement de variables dans $\mathbb{R}^d$.

a) Changement de variables linéaire

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. Notons que si u n'est pas inversible, $u(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans un hyperplan. Or les hyperplans de $\mathbb{R}^d$ sont de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^d$: si $H < \mathbb{R}^d$ est de dimension $d-1$, $\lambda_d(H) = 0$.

Par suite, si u n'est pas inversible, quel que soit l'ensemble A mesurable au sens de Lebesgue, $u(A)$ est inclus dans un ensemble mesurable de mesure nulle, donc $u(A)$ est aussi mesurable de mesure nulle. Ainsi, on a de façon triviale la relation $\lambda_d(u(A)) = |\det u|\, \lambda_d(A)$.

On va voir d'où vient cette relation lorsque u est inversible, c'est-à-dire que $\det u \neq 0$.

Proposition : soit u un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$. Alors pour tout $A \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$ on a $\lambda_d(u(A)) = |\det u|\, \lambda_d(A)$.
Ainsi, la mesure image de λ_d par u est $u_* \lambda_d = |\det u|^{-1} \lambda_d$.

Démonstration : • on commence par vérifier que l'application

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, +\infty]$$
$$A \longmapsto \mu(A) := \lambda_d(u(A))$$

est bien définie et est une mesure. En effet, comme u est un isomorphisme, pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$ on a $u(A) = (u^{-1})^{-1}(A)$ et u^{-1} est continue donc borélienne. Donc $u(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On a $\mu(\emptyset) = \lambda_d(u(\emptyset)) = \lambda_d(\emptyset) = 0$, et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ avec les A_n deux à deux disjoints, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lambda_d\left(u(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)\right) = \lambda_d\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} u(A_n)\right)$
$= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_d(u(A_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$, où l'on a utilisé le fait que u était inversible et que λ_d était une mesure.

De plus, puisque u est linéaire, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a
$\mu(x+A) = \lambda_d(u(x)+u(A)) = \lambda_d(u(A)) = \mu(A)$, puisque λ_d est invariante par translation. Donc μ est aussi invariante par translation.

Et si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est borné (ie il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|x\| \leq M$ quelque soit $x \in A$) alors $u(A)$ est borné (puisque pour tout $y = u(x) \in u(A)$, $\|y\| \leq |||u||| \, \|x\|$). Donc μ prend une valeur finie sur tous les boréliens bornés, comme λ_d.

On admettra que ces propriétés (mesure invariante par translation prenant des valeurs finies sur les bornés) impliquent l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}^+$ telle que $\mu = c\lambda$.

- Il reste alors seulement à montrer que $c = |\text{dét}\, u|$. Ceci se fait en plusieurs étapes. Soit M la matrice de u dans la "base canonique" de $\mathbb{R}^d$.

* Si M est orthogonale (ie $M^{-1} = {}^tM$), cela signifie que u est une isométrie. Donc la boule unité $B = \{x \in \mathbb{R}^d ; \|x\| \leq 1\}$ est invariante par u. Par suite, $\mu(B) = \lambda(B) > 0$. Donc $c = 1 = |\text{dét}\, u|$.

* Si M est symétrique définie positive, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, il existe une matrice orthogonale $\mathbb{R}$ et une matrice diagonale $\mathbb{D}$ à coefficients réels strictement positifs α_i telles que ${}^tR\, M\, R = \mathbb{D}$. Considérons le pavé $P = [0,1]^d$ et le borélien $A = RP$. Alors on sait d'après l'étape précédente que $\lambda_d(A) = \lambda_d(P) = 1$ par définition de λ_d. Par ailleurs,
$\mu(A) = \lambda_d(MA) = \lambda_d(\mathbb{R}\mathbb{D}P) = \lambda_d(\mathbb{D}P)$ d'après l'étape 1 encore. De plus, $\mathbb{D}P = \prod_{i=1}^{d} [0, \alpha_i]$, donc $\lambda_d(\mathbb{D}P) = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i = |\text{dét}\, \mathbb{D}| = |\text{dét}\, M|$. Donc on a bien $c = |\text{dét}\, M| = |\text{dét}\, u|$.

* Dans le cas général, on peut faire appel à la décomposition polaire : M étant une matrice inversible, il existe une matrice orthogonale R et une matrice symétrique définie positive S telles que $M = RS$.
($S = ({}^tMM)^{1/2}$ et $R = MS^{-1}$).

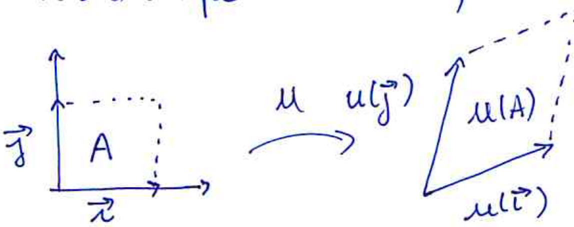
Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ alors $u(A) = \lambda_d(RSA) = \lambda_d(SA)$ d'après l'étape 1, i.e. encore $u(A) = |\det S|\, \lambda_d(A)$ d'après l'étape 2.

Or $|\det S| = \sqrt{(\det M)^2} = |\det M| = |\det u|$.

car $A = u(u^{-1}(A))$

- Pour finir, si $A \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$, $(u_* \lambda_d)(A) = \lambda_d(u^{-1}(A)) = |\det u|^{-1} \lambda_d(A)$ ■

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, si $A = [0,1]^2$, $u(A)$ est le parallélogramme de côtés $u(\vec{\imath})$ et $u(\vec{\jmath})$, si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



L'aire de $u(A)$ est précisément égale à $|\det u|$.

De même, dans $\mathbb{R}^3$, le volume d'un parallélépipède obtenu comme l'image par un isomorphisme u de $[0,1]^3$ est $|\det u|$.

<u>Théorème de changement de variables linéaire</u> : si u est un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$, si $Y = u(X)$ avec $X \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$, si $f : Y \to \mathbb{C}$ est intégrable alors $f \circ u : X \to \mathbb{C}$ est intégrable et

$$\int_X f(u(x))\, |\det u|\, d\lambda_d(x) = \int_Y f(y)\, d\lambda_d(y).$$

<u>Démonstration</u> : si f est intégrable alors, par définition, elle est mesurable et donc $f \circ u$ aussi, puisque u est mesurable.

XII D'après le théorème de transfert, on a

$$\int_X |f(u(x))|\, d\lambda_d(x) = \int_Y |f(y)|\, d(u_* \lambda_d)(y) = |\det u|^{-1} \int_Y |f(y)|\, d\lambda_d(y)$$

puisque $u_* \lambda_d = |\det u|^{-1} \lambda_d$. Donc $\int_X |f(u(x))|\, d\lambda_d(x) < +\infty$ puisque

et $\int_Y |f(y)|\, d\lambda_d(y) < +\infty$, et on a de la même façon:

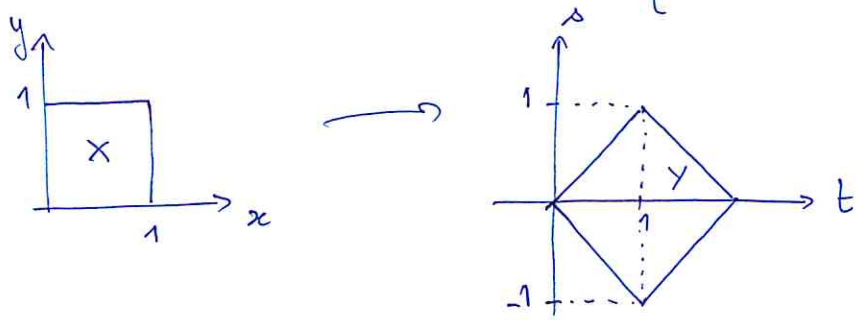
$$\int_X f(u(x))\, d\lambda_d(x) = \int_Y f(y)\, d\lambda_d(y)\; |\det u|^{-1}.$$

<u>Exemple</u> : soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x+y,\, x-y)$.

C'est un isomorphisme, de réciproque $u^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(t,s) \longmapsto \left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right)$,

et $|\det u| = 2$.

Si $X = [0,1]^2$ alors $u(X) = \{(t,s);\ 0 \leq t+s \leq 2,\ 0 \leq t-s \leq 2\}$.



Si f est intégrable sur $\diamond$ elle l'est sur $\square$ et

$$\int_{\diamond} f(t,s)\, \underbrace{d\lambda_2(t,s)}_{\text{noté } dt\,ds} = \int_{\square} \tilde{f}(x,y)\, \underbrace{d\lambda_2(x,y)}_{\text{noté } dx\,dy} \times 2,$$

avec $\tilde{f} := f \circ u$.

b) Changement de variables non-linéaire

Ce qu'on vient de voir s'étend à des changements de variables non-linéaire qu'on appelle difféomorphismes.

Définition : Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une fonction $\varphi : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si

i) φ est bijective (de U sur V)

ii) φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U,

iii) φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Il faut bien prendre garde aux trois propriétés.

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}$.

On peut caractériser les difféomorphismes grâce au théorème d'inversion locale (qui sort du cadre de ce cours).

Avant de donner cette caractérisation, rappelons que pour toute fonction différentiable $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on définit en chaque point $x \in U$ la matrice jacobienne de φ

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i \le d,\ 1 \le j \le d}.$$

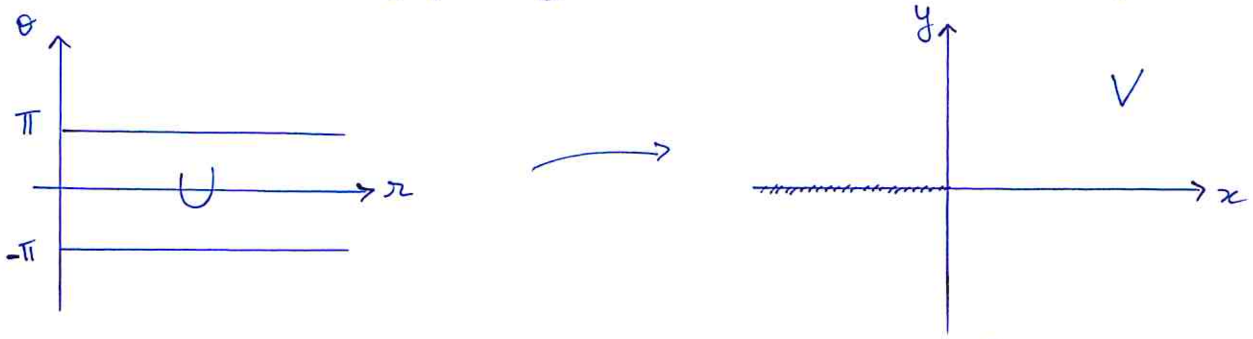
Dans la suite, on note $J_\varphi(x)$ son déterminant, appelé jacobien.

Théorème : Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, si $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ est injective et de classe $\mathcal{C}^1$, alors c'est une bijection de U sur $\varphi(U)$, qui est ouvert, dont la réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si, pour tout $x \in U$, $J_\varphi(x) \neq 0$.

Exemples de changements de variables non-linéaires

- **coordonnées polaires** : Soient $U := \{(r,\theta);\ r \in]0,+\infty[,\ \theta \in]-\pi,\pi[\}$

et $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ ou } y \neq 0\}$.



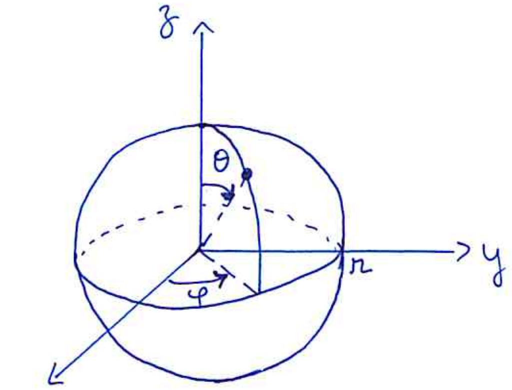
Soit $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$: elle est $\mathcal{C}^1$ et injective sur U.

Sa matrice jacobienne en (r,θ) est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

et $J_\varphi(r,\theta) = r > 0$ pour $(r,\theta) \in U$.

- **coordonnées sphériques** : Soient $U :=]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$

$V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$, et $f : (r,\varphi,\theta) \mapsto (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$.



Matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$J_\varphi(r,\varphi,\theta) = -r^2\sin\theta \neq 0$ pour $(r,\varphi,\theta) \in U$.

Théorème de changement de variables (admis)

Soit U, V des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

1) Si $f : V \to [0,+\infty]$ est mesurable alors

$f \circ \varphi \times |J_\varphi| : U \to [0,+\infty]$ est mesurable et

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U (f\circ\varphi)(x)\,|J_\varphi(x)|\,dx.$$

2) Si $f : V \to \mathbb{C}$ est intégrable alors

$f\circ\varphi \times |J_\varphi| : U \to \mathbb{C}$ est intégrable et

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U (f\circ\varphi)(x)\,|J_\varphi(x)|\,dx.$$

Exemples d'application :

- intégration en polaires : en remarquant que $\mathbb{R}^- \times \{0\}$ est de mesure nulle, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est intégrable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

ou encore $$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta,$$ puisque $\mathbb{R}^+\times\{0\}$ est aussi de mesure nulle et

$$\begin{aligned}]0,+\infty[\times]0,2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}^+\times\{0\}) \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

est encore un difféomorphisme.

- intégration en sphériques : $\mathbb{R}^+\times\{0\}\times\mathbb{R}$ est de mesure nulle, et si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ est intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$