III

Chap. VII - Mesures

On aura besoin dans ce chapitre de sommer des éléments de $[0,+\infty]$.

Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty]^{\mathbb{N}}$, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$ l'élément de $[0,+\infty]$ défini par :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = +\infty \text{ s'il existe } n\in\mathbb{N} \text{ tel que } \lambda_n = +\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \text{, qui existe dans } [0,+\infty] \text{ car la} \end{cases}$$

suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Attention, il faut bien distinguer les séries de leur somme, et ce qui précède est réservé aux séries à termes positifs.

<u>Notation</u> : $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ désigne la série de terme général, sans présager de sa convergence, tandis que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ désigne sa somme, soit si c'est une série à termes positifs (et dans ce cas la somme peut valoir $+\infty$), soit si c'est une série convergente (et dans ce cas la somme est nécessairement un réel, pour une série à termes réels).

Dans tous les cas, écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sous-entend que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)$.

NB : on n'écrit jamais une limite sans avoir justifié au préalable qu'elle existe.

1 Définitions et premiers exemples

Définition : Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. On appelle **mesure** (positive) sur X toute application $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que

1) $\mu(\emptyset) = 0$,

2) pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints (c'est-à-dire telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$ quels que soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$), $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Remarque : • si $(B_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints et si μ est une mesure sur $\mathcal{M}$, on a $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k)$.

Il suffit pour cela d'appliquer la définition à $A_k = B_k$ si $k \in [\![0,n]\!]$ et $A_k = \emptyset$ pour tout $k \geqslant n$.

• En particulier, on déduit que si $A \subset B$ avec $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(A) < +\infty$ et $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Il suffit de remarquer que $B = (B \setminus A) \cup A$, réunion disjointe, d'où $\mu(B) = \mu(B\setminus A) + \mu(A)$.

Cette relation est encore vraie si $\mu(B) = +\infty$ mais pas très utile.

Exemples de mesure :

a) **Mesure de comptage** : sur $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ (la tribu discrète sur X), on peut définir μ par $\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ n'est pas fini.} \end{cases}$

C'est une mesure d'après les propriétés du cardinal.

b) Mesure de Dirac : sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ quelconque avec $X \neq \emptyset$, pour $x \in X$ fixé on peut définir $\mu = \delta_x$ par $\mu(A) = \mathbb{1}_A(x)$.

On vérifie que c'est une mesure.

c) Mesure de probabilité : si $(\Omega, \mathcal{E})$ est un espace mesurable (Ω est 'l'univers', $\mathcal{E}$ l'ensemble des événements possibles), une mesure de probabilité sur $\mathcal{E}$ est une mesure P à valeurs dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$.

Si Ω est fini et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, il suffit de connaître la probabilité des événements élémentaires ($P(\{\omega_i\})$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ si $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}$) pour connaître P.

La mesure de probabilité uniforme est définie par $P(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.

Définition : Si $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable et μ une mesure sur $\mathcal{M}$, on appelle $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

② Propriétés élémentaires

Proposition 1 : Une mesure positive est monotone, c'est-à-dire que si A et B sont mesurables et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$,
et sous-additive : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Démonstration : on a presque déjà vu le premier point, puisque $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$ lorsque $A \subset B$ et $\mu(B\setminus A) \in [0, +\infty]$.

Pour le 2ème point, on va se ramener à une réunion disjointe.

Posons $B_0 = A_0$ et pour tout $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.

Alors par construction $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ puisque $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ (par une récurrence immédiate). Donc $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n)$,

avec $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ puisque $B_n \subset A_n$.

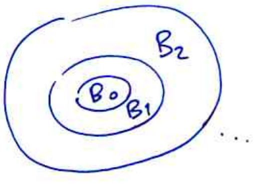
Donc $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$. ∎

<u>Proposition 2</u> : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables.

- Si elle est croissante au sens de l'inclusion (c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) alors $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
- Si elle est décroissante et si $\mu(A_0) < +\infty$ alors $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

Attention, ce second résultat est faux si l'on omet l'hypothèse $\mu(A_0) < +\infty$.
Par exemple dans $\mathbb{N}$ muni de la tribu discrète $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage, $A_n = \{k \in \mathbb{N} ; k \geq n\}$ fournit une suite décroissante d'ensembles mesurables telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ et $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$, qui n'est pas égal à $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.

<u>Démonstration</u> : • si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,



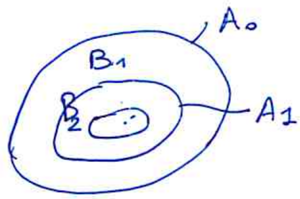
posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Alors $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ (par une récurrence immédiate).

Donc $\mu(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k)$, et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, donc

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \mu(B_k)\Big).$$

D'où le résultat : $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.



- si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\mu(A_0) < +\infty$,

Posons $B_n = A_0 \setminus A_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \setminus \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.

Donc $\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$ puisque $\mu(A_0) < +\infty$,

et d'après le premier résultat, $(\mu(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$.

Comme on a aussi $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, on en déduit le résultat voulu : $(\mu(A_0) - \mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$,

et donc $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. ∎

3 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

On admettra le résultat suivant.

Théorème : Il existe une unique mesure (positive) sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, notée λ, telle que

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\lambda(]a,b[) = b - a$.

Cette mesure est clairement faite pour généraliser la notion de longueur. Elle est appelée mesure de Lebesgue.

Proposition (mesure de Lebesgue des intervalles)

Quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, on a

$$\lambda([a,b]) = \lambda([a,b[) = \lambda(]a,b]) = b - a,$$

$$\lambda(]-\infty,a]) = \lambda(]-\infty,a[) = +\infty,$$

$$\lambda([b,+\infty[) = \lambda(]b,+\infty[) = +\infty, \quad \text{et } \lambda(\mathbb{R}) = +\infty.$$

Démonstration : • commençons par $[a,a]=\{a\}$.

Comme $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right[$, intersection décroissante avec

$\lambda\left(\left]a-\frac{1}{1}, a+\frac{1}{1}\right[\right) = 2 < +\infty$, on a $\lambda(\{a\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\lambda\left(\left]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right[\right)}_{2/n} = 0$

• Ainsi, comme $[a,b[= \{a\} \cup]a,b[$, réunion disjointe,

$\lambda([a,b[) = \lambda(\{a\}) + \lambda(]a,b[) = b-a$.

De même, $]a,b] = \{b\} \cup]a,b[$ donc $\lambda(]a,b]) = b-a$,

et $[a,b] =]a,b] \cup \{a\}$ donc $\lambda([a,b]) = b-a$.

• Comme $]-\infty,a] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a-n,a]$, $]-\infty,a[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a-n,a[$,

réunions croissantes, on en déduit

$\lambda(]-\infty,a]) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\lambda(]a-n,a])}_{n} = +\infty$, $\lambda(]-\infty,a[) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(]a-n,a[) = +\infty$

De même, $[b,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [b,b+n[$, $]b,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]b,b+n[$,

donc $\lambda([b,+\infty[) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lambda(]b,+\infty[) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

• Enfin, $\mathbb{R} =]-\infty,a] \cup]a,+\infty[$, réunion disjointe, donc

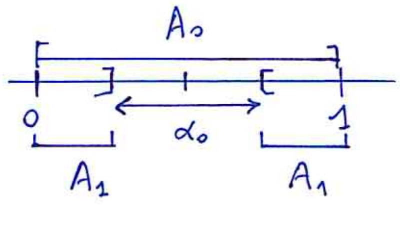
$\lambda(\mathbb{R}) = +\infty + +\infty = +\infty$. ∎

④ Ensembles de Cantor

On peut calculer la mesure de Lebesgue d'ensembles beaucoup moins intuitifs que les intervalles.

Par exemple un ensemble de Cantor, construit de la manière suivante.

On pose $A_0 = [0,1]$ et on se donne une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres strict^t positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \alpha_n \leq 1$ (comme par exemple $\alpha_n = \frac{1}{3^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$),



puis $A_1 = A_0 \setminus \left]\frac{1}{2}-\frac{\alpha_0}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\alpha_0}{2}\right[$, de sorte que

$\lambda(A_1) = 1-\alpha_0$, et ainsi de suite...

Hypothèse de récurrence : supposons construits des sous-ensembles de $[0,1]$ emboîtés $A_n \subset \dots \subset A_0$ tels que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, A_k est la réunion de 2^k segments de longueur $\frac{1}{2^k}\left(1-\sum_{l=0}^{k-1} 2^l \alpha_l\right)$, de sorte que $\lambda(A_k) = 1 - \sum_{l=0}^{k-1} 2^l \alpha_l$. Alors on définit A_{n+1} en retirant à chacun des 2^n segments de A_n un intervalle ouvert de longueur α_n, centré sur le milieu du segment. Ainsi $A_{n+1} \subset A_n$, A_{n+1} est constitué de 2^{n+1} segments de longueur $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\left(1-\sum_{l=0}^{n-1} 2^l \alpha_l\right) - \alpha_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\sum_{l=0}^{n} 2^l \alpha_l\right)$,

et donc $\lambda(A_{n+1}) = 1 - \sum_{l=0}^{n} 2^l \alpha_l$.

On construit ainsi une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante, de compacts de $[0,1]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(A_n) = 1 - \sum_{l=0}^{n-1} 2^l \alpha_l$.

Comme $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k = A_n \text{ et}\right) \lambda(A_n) > 0$ (sinon on aurait $\sum_{l=n}^{+\infty} 2^l \alpha_l = 0$ puisque par hypothèse $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \alpha_n \leq 1$, donc $\alpha_l = 0$ pour tout $l \geq n$ alors que les α_l sont strictement positifs), on a $A_n \neq \emptyset$, donc d'après un résultat de topologie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un compact non vide.

L'ensemble $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est appelé ensemble de Cantor.

Sa mesure, puisque $\lambda(A_0) = 1 < +\infty$, est $\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \alpha_n$.

- si $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \alpha_n = 1$ (comme par exemple pour $\alpha_n = \frac{1}{3^n}$),

on dit que c'est un ensemble de Cantor maigre.

- si $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \alpha_n < 1$, ———————— gras.

On montre que K est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et qu'il contient forcément des non-boréliens, pour une raison de cardinalité.

Noter qu'on a ainsi trouvé un "gros" ensemble (équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et donc à $\mathbb{R}$) de mesure de Lebesgue nulle.

5 Complétion des mesures

Définition : Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie N de X est dite négligeable s'il existe une partie A de X, mesurable de mesure nulle (i.e $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$) telle que $N \subset A$.

On remarque qu'avec cette définition toute partie d'un ensemble négligeable l'est aussi.

Cependant, l'exemple des ensembles de Cantor maigres et le fait qu'ils admettent des parties non boréliennes montrent qu'un ensemble négligeable n'est pas forcément mesurable.

Définition : Un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dit complet, ou encore μ est complète sur $\mathcal{M}$ si toute partie de X négligeable est mesurable.

Remarque : d'après la monotonie des mesures, toute partie négligeable et mesurable est nécessairement de mesure nulle.
Par suite, dans un espace mesuré complet les parties négligeables sont exactement les parties mesurables et de mesure nulle.

La mesure de Lebesgue n'est pas complète sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, mais on peut compléter la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ en ce qu'on appelle la tribu de Lebesgue pour rendre la mesure de Lebesgue complète (sur la tribu de Lebesgue donc).

Proposition : Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties négligeables de X, et soit $\mathcal{M}^*$ la tribu engendrée par $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$.
Alors les éléments E de $\mathcal{M}^*$ sont caractérisés par l'une quelconque des deux assertions suivantes :
1) $E = A \cup N$ avec $A \in \mathcal{M}$ et $N \in \mathcal{N}$,
2) il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.

Démonstration : • commençons par vérifier que, quel que soit $E \in \mathcal{P}(X)$, la propriété 1) équivaut à la propriété 2).

* s'il existe $A \in \mathcal{M}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $E = A \cup N$, alors $A \subset E \subset A \cup D$, avec $D \in \mathcal{M}$ tel que $N \subset D$ et $\mu(D) = 0$. On a donc 2) avec $B = A \cup D$, car $B \setminus A \subset D$ donc $\mu(B \setminus A) \leq \mu(D) = 0$.

* s'il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$, alors $E = A \cup (E \setminus A)$ et $E \setminus A \subset B \setminus A$ donc $E \setminus A \in \mathcal{N}$.

• Montrons maintenant que $\mathcal{M}^*$ coïncide avec $\widetilde{\mathcal{M}} := \{ E \in \mathcal{P}(X) ; E = A \cup N, A \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N} \}$.

Comme par définition $\mathcal{M}^*$ est engendrée par $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, on a déjà $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^*$, car $\mathcal{M}^*$ contient $A \in \mathcal{M}$ et $N \in \mathcal{N}$ quels que soient A et N, donc aussi $A \cup N$.

Et $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$, puisque si $A \in \mathcal{M}$ alors $A = A \cup \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{N}$,
et si $N \in \mathcal{N}$ alors $N = \emptyset \cup N$, $\emptyset \in \mathcal{M}$!

Si on montre que $\widetilde{\mathcal{M}}$ est une tribu, on pourra donc en déduire que $\sigma(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = \mathcal{M}^* \subset \widetilde{\mathcal{M}}$, d'où finalement l'égalité.

Or * $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \widetilde{\mathcal{M}}$

* si $E \in \widetilde{\mathcal{M}}$, il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subset E \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$.
Alors $B^c \subset E^c \subset A^c$ et $A^c \setminus B^c = \{ x \in X ; x \notin A \text{ et } x \in B \} = B \setminus A$.
Donc $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0$. Donc $E^c \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

* si $E_n \in \widetilde{\mathcal{M}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in \mathcal{M}$ et $N_n \in \mathcal{N}$ tels que $E_n = A_n \cup N_n$.
D'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \right)$.
on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ puisque $\mathcal{M}$ est une tribu. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $D_n \in \mathcal{M}$ tel que $N_n \subset D_n$ et $\mu(D_n) = 0$.
Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, et $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(D_n) = 0$.

Donc $\widetilde{\mathcal{M}}$ est bien une tribu. ∎

VII

Proposition : si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré, si $\mathcal{M}^*$ est la tribu complétée de $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire engendrée par $\mathcal{M}$ et l'ensemble des parties négligeables de X), il existe une unique mesure μ^* sur $\mathcal{M}^*$ qui prolonge μ (ie $\mu^*(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$).
Elle est définie par $\mu^*(A \cup N) = \mu(A)$, quel que soient $A \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$.

Démonstration : • si une telle mesure μ^* existe, si $E \in \mathcal{M}^*$, $E = A \cup N$ avec $N \subset D \in \mathcal{M}$, $\mu(D) = 0$, alors $A \subset E \subset A \cup D$, donc $\underbrace{\mu^*(A)}_{\mu(A) \text{ aussi}} \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(A \cup D) \leq \mu^*(A) + \mu^*(D) = \mu(A)$.

D'où $\mu^*(E) = \mu(A)$.

• On remarque que si $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ avec $N_i \subset D_i \in \mathcal{M}$, $\mu(N_i) = 0$, $i = 1$ ou 2, alors $A_1 \subset E \subset A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup D_2$, donc $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$, et vice versa en échangeant $i=1$ et $i=2$.
Donc $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.
On définit donc bien une application $\mu^* : \mathcal{M}^* \longrightarrow [0, +\infty]$ en posant $\mu^*(A \cup N) = \mu(A)$ pour $A \in \mathcal{M}$ et $N \in \mathcal{N}$.
C'est bien une mesure car $\mu^*(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) = 0$ et si

$E_n = A_n \cup N_n$ avec $A_n \in \mathcal{M}$ et $N_n \in \mathcal{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$E_n \cap E_m = \phi$ pour $n \neq m$, alors $A_n \cap A_m = \phi$.

D'où $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu^*\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$

(car $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}$, comme on l'a déjà vu dans la démonstration de la proposition précédente). Et $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ puisque μ est une mesure. Finalement, on a bien :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(E_n).$$

$\blacksquare$

⑥ Mesure et tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

a) Dimension $d=1$.

Définition : on appelle tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue λ.
La mesure complétée λ^* est encore appelée mesure de Lebesgue, et notée simplement λ.

On peut montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^*$ est équipotente à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, tandis que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est équipotente à $\mathbb{R}$.

Cependant on a $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La démonstration se fait par l'absurde et repose sur l'axiome du choix.
Si l'on munit $\mathbb{R}$ de la relation d'équivalence $\sim$ définie par $x \sim y$ si et seulement si $x-y \in \mathbb{Q}$, si l'on choisit pour tout $\dot{x} \in X = \mathbb{R}/\sim$ un représentant $e_{\dot{x}} \in [0,1]$ de la classe de x, alors $E := \{e_{\dot{x}} \,;\, \dot{x} \in X\}$ est un sous-ensemble de $[0,1]$ non mesurable au sens de Lebesgue. Car s'il l'était, on aurait

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} (q+E) \subset [0,2]$$

donc $\displaystyle\sum_{q \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \lambda(E) \leq \lambda([0,2]) = 2$ (puisque $\lambda(q+E) = \lambda(E)$: la mesure est invariante par translation, comme on le verra plus loin).
Mais en fait, les ensembles $\underbrace{q+E}_{\text{avec } q\in\mathbb{Q}}$ forment une $\underbrace{\text{partition}}_{\text{dénombrable}}$ de $\mathbb{R}$.

Donc $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(q+E) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(E) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$,

ce qui implique nécessairement $\lambda(E) > 0$. Ainsi on devrait avoir $0 < \lambda(E)$ et $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \lambda(E) \leq 2$: c'est absurde puisque $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est infini.

b) Dimension d quelconque

On admet les résultats suivants.

<u>Théorème</u> : Il existe une unique mesure (positive) sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne, notée λ_d, telle que pour tout pavé $P = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$ avec $a_i < b_i$ pour $i \in [\![1, d]\!]$, on ait
$\lambda_d(P) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$.

La tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour la mesure λ_d est appelée tribu de Lebesgue.

La mesure complétée λ_d^* est la mesure de Lebesgue, simplement notée λ_d.

<u>Proposition</u> (propriétés géométriques)

La mesure de Lebesgue est invariante par translation et par rotation.

Plus précisément, pour toute partie B de $\mathbb{R}^d$ mesurable au sens de Lebesgue, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et pour tout endomorphisme de $\mathbb{R}^d$,

- $y + B$ est mesurable et $\lambda_d(y+B) = \lambda_d(B)$,
- $u(B)$ est mesurable et $\lambda_d(u(B)) = |\det u|\, \lambda_d(B)$.

En particulier, * si $u = s$ une symétrie centrale (par exemple $x \mapsto -x$)

$$\lambda_d(s(B)) = \lambda_d(B) ;$$

* si $u = r$ une rotation

$$\lambda_d(r(B)) = \lambda_d(B) ;$$

* si $u = D$ est une dilatation de rapport α dans une direction, $\lambda_d(D(B)) = \alpha\, \lambda_d(B)$;

* si $u = S$ est une réflexion, $\lambda_d(S(B)) = \lambda_d(B)$;

* si $u = h$ est une homothétie de rapport α,

$$\lambda_d(h(B)) = \alpha^d \lambda_d(B).$$

VII

Proposition (propriétés "topologiques")

- La mesure de Lebesgue prend une valeur finie sur tout compact : on dit pour cette raison qu'elle est borélienne.
- Elle est aussi régulière, au sens où elle a les deux propriétés suivantes :

  * régularité intérieure : pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable au sens de Lebesgue, $\lambda_d(E) = \sup \{ \lambda_d(K) ;\ K \subset E,\ K \text{ compact} \}$.

  * régularité extérieure :
$$\lambda_d(E) = \inf \{ \lambda_d(U) ;\ E \subset U,\ U \text{ ouvert} \}.$$

Les propriétés de régularité se traduisent ainsi. Si $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un compact K et un ouvert U tels que
$K \subset E \subset U$ et $\lambda_d(U) - \varepsilon \leq \lambda_d(E) \leq \lambda_d(K) + \varepsilon$.

En fait on a même plus précisément :

Proposition : Pour tout $E \subset \mathbb{R}$, mesurable au sens de Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert U tels que
$F \subset E \subset U$ et $\lambda_d(U \setminus E) \leq \varepsilon$, $\lambda_d(E \setminus F) \leq \varepsilon$.
(Lorsque $\lambda_d(E) < +\infty$, il existe un compact K tel que $K \subset E$, $\lambda_d(E \setminus K) \leq \varepsilon$.)

Grâce à ces propriétés, on peut caractériser les ensembles mesurables de façon un peu plus "concrète".

Corollaire : Soit $E \subset \mathbb{R}$. Alors E est mesurable au sens de Lebesgue si et seulement s'il vérifie l'une des deux propriétés suivantes.

i) Il existe G un G_δ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts) et un ensemble N, mesurable et de mesure nulle, tels que $E = G \setminus N$.

ii) Il existe F un F_σ (i.e. une réunion dénombrable de fermés) et un ensemble N', mesurable et de mesure nulle, tels que $E = F \cup N'$.

<u>Démonstration</u> : Si on a i) ou ii) alors E est mesurable car on sait déjà qu'un G_δ et un F_σ sont mesurables.

Réciproquement, si E est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un ouvert U_n et un fermé F_n tels que $F_n \subset E \subset U_n$,

$\lambda_d(U_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$, $\lambda_d(E \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$.

Soient alors $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$, $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. On a $F \subset E \subset G$,

et donc $E = G \setminus (G \setminus E) = F \cup (E \setminus F)$.

Comme $G \setminus E \subset U_n \setminus E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lambda_d(G \setminus E) \leq \frac{1}{n}$,

et donc $\lambda_d(G \setminus E) = 0$.

De façon analogue, $E \setminus F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (E \setminus F_n) \subset E \setminus F_n$ donc $\lambda_d(E \setminus F) \leq \frac{1}{n}$,

d'où $\lambda_d(E \setminus F) = 0$.

∎