Chapitre I : Compléments sur les suites réelles

Commençons par rappeler l'axiome de la borne sup :

toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Avec des symboles mathématiques : si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leq M$, alors il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $s = \sup A$, ce qui veut dire que s est le plus petit des majorants de A, ou encore que : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $s - \varepsilon \leq a \leq s$.

Application aux suites monotones : toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, croissante et majorée est convergente et sa limite est $\sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$, aussi noté $\sup(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ⚠ aux notations : suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, terme général u_n.

De même, toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, et toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, décroissante et minorée est convergente, de limite $\inf\{u_n ; n\in\mathbb{N}\}$, aussi noté $\inf(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ La « plupart » des suites convergentes ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Rappel : une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (càd une suite de nombres réels ou complexes) est convergente s'il existe un nombre l (réel ou complexe) tel que : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Comme vous le voyez (ou verrez) en topologie, la convergence des suites est définie de la même manière dans les espaces métriques, en remplaçant $|u_n - l|$ par la distance entre u_n et l.

NB : la valeur absolue définit une distance dans $\mathbb{R}$ par $d(x,y) = |x-y|$, et le module une distance ds $\mathbb{C}$.

I

(

① Limite sup et limite inf

Une suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle n'a aucune raison d'être convergente, admet néanmoins un sup et un inf.

Ceci permet notamment de définir, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$u_n^- := \inf\{u_k\,;\,k\geqslant n\}$, $u_n^+ := \sup\{u_k\,;\,k\geqslant n\}$, dès que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

En remarquant que la « suite d'ensembles » $(\{u_k\,;\,k\geqslant n\})$ est « décroissante », càd que si $m\leqslant n$ alors $\{u_k\,;\,k\geqslant n\}\subset\{u_k\,;\,k\geqslant m\}$, on voit que la suite réelle $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite réelle $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ceci vient du fait que si A et B sont deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, si $A\subset B$ alors

$\inf A \geqslant \inf B$ et $\sup A \leqslant \sup B$.

Comme $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorées par les majorants de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et minorées par ses minorants, elles sont donc bornées et monotones, et par conséquent convergentes.

<u>Définition</u> : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- si elle n'est pas majorée, on pose $\limsup(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \overline{\lim}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = +\infty$.
- si elle n'est pas minorée, on pose $\liminf(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underline{\lim}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = -\infty$.
- si elle est bornée, on pose $\limsup(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \overline{\lim}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$
  $\liminf(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underline{\lim}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$;

avec $u_n^- = \inf\{u_k\,;\,k\geqslant n\}$, $u_n^+ = \sup\{u_k\,;\,k\geqslant n\}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On peut caractériser les suites réelles convergentes grâce à leur limsup et leur liminf.

Théorème : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\limsup(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \liminf(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$.

Démonstration : (noter que c'est une équivalence)

- si $l = \limsup(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \liminf(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par définition de limsup et liminf) et l'on a :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n^- \leq u_n \leq u_n^+$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et est croissante, il existe $N_- \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_-$, $\quad -\varepsilon \leq u_n^- - l \leq 0$.

De même, comme $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et est décroissante, il existe $N_+ \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_+$, $\quad 0 \leq u_n^+ - l \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour $n \geq N := \max(N_-, N_+)$, $\quad -\varepsilon \leq u_n^- - l \leq u_n - l \leq u_n^+ - l \leq \varepsilon$.

Ceci prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

- Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors elle est bornée donc $\limsup(u_n)_{n\in\mathbb{N}} =: l^+$ et $\liminf(u_n)_{n\in\mathbb{N}} =: l^-$ sont réels.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, pour tout $k \geq n$, $\quad l - \varepsilon \leq u_k \leq l + \varepsilon$,

ce qui implique $l - \varepsilon \leq \inf\{u_k ; k \geq n\} \leq \sup\{u_k ; k \geq n\} \leq l + \varepsilon$,

càd $l - \varepsilon \leq u_n^- \leq u_n^+ \leq l + \varepsilon$, d'où, puisque c'est vrai pour tout $n \geq N$,

$$l - \varepsilon \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} (u_n^-) \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} (u_n^+) \leq l + \varepsilon \text{ , en passant à la limite.}$$

Autrement dit, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$l - \varepsilon \leq \liminf(u_n) \leq \limsup(u_n) \leq l + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on en déduit $\liminf(u_n) = \limsup(u_n) = l$. ∎

Remarque : en général, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, on a seulement $\liminf(u_n) \leq \limsup(u_n)$.

I

De plus, contrairement à la notion de limite, les limites sup et inf ne sont pas des notions linéaires.

Proposition : Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée,

$\liminf(-u_n) = -\limsup(u_n)$,

et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite réelle bornée,

$\liminf(u_n) + \liminf(v_n) \leqslant \liminf(u_n+v_n)$,

$\limsup(u_n+v_n) \leqslant \limsup(u_n) + \limsup(v_n)$,

avec égalité si l'une des deux suites converge.

Démonstration : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(-u_n)^- = -u_n^+$,

d'où la première égalité en passant à la limite.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n^- + v_n^- \leqslant u_k + v_k$ quel que soit $k\geqslant n$,

donc $u_n^- + v_n^- \leqslant (u_n+v_n)^-$ (attention à cette notation)

puis $\liminf(u_n)_n + \liminf(v_n)_n \leqslant \liminf(u_n+v_n)_n$ en passant à la limite.

La 2ème inégalité s'obtient de manière analogue, ou bien se déduit de la précédente et de l'égalité vue avant.

Si par exemple (u_n) converge, en appliquant ces inégalités à (u_n+v_n) et $(-u_n)$, on obtient

$\liminf(u_n+v_n)_n - \lim(u_n)_n \leqslant \liminf(v_n)_n$,

$\limsup(v_n)_n \leqslant \limsup(u_n+v_n)_n - \lim(u_n)_n$,

ce qui donne les inégalités opposées à celles qui sont vraies en général, d'où les égalités dans ce cas particulier. ∎

Elles sont fausses en général : considérer par exemple $u_n=(-1)^n$, $v_n=(-1)^{n+1}$.

② Valeurs d'adhérence

Définition : Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un nombre a pour valeur d'adhérence si : quel que soit $\varepsilon > 0$, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.

⚠ Bien noter la différence dans les quantificateurs avec la notion de limite.

Cette notion est encore valable dans les espaces métriques, en remplaçant $|u_n - a|$ par la distance entre u_n et a.

Proposition : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet a pour valeur d'adhérence si et seulement s'il existe une sous-suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ – avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante – convergeant vers a.

Démonstration :

* ou suite extraite

- Si a est une valeur d'adhérence, on peut construire par récurrence une suite d'entiers $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$, strictement croissante telle que (par exemple) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|u_{n_p} - a| \leq 2^{-p}$,

  ce qui implique que $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

  Construction de $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$: en appliquant la définition à $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, on trouve $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_0} - a| \leq 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons (hypothèse de récurrence) avoir construit $n_0 < n_1 < \dots < n_p$ tels que $|u_{n_q} - a| \leq 2^{-q}$ pour tout $q \in \{0, \dots, p\}$. Alors en appliquant la définition à $\varepsilon = 2^{-(p+1)}$ et $N = n_p + 1$, on trouve $n_{p+1} > n_p$ tel que $|u_{n_{p+1}} - a| \leq 2^{-(p+1)}$.

  On pose alors $\varphi(p) = n_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$: φ est strictement croissante et $u_{\varphi(n)} \to a$.

1

- Réciproquement, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, soit $\varepsilon > 0$:

il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq N'$, $|u_{\varphi(p)} - a| \leq \varepsilon$.

Soit $N \in \mathbb{N}$: alors $n := \varphi(\max(N, N'))$ est tel que

$n \geq \varphi(N) \geq N$ et $p = \max(N, N') \geq N'$,

donc $|u_n - a| \leq \varepsilon$. ∎

Remarque : on a utilisé la propriété bien pratique des applications $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes qui est que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème (Bolzano-Weierstrass : admis ici, voir cours de L1 ou de topologie)

Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

③ Lien avec les limites sup et limites inf

Proposition : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, $\liminf (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sa plus petite valeur d'adhérence, $\limsup (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sa plus grande valeur d'adhérence.

Démonstration :

- Montrons (par exemple) que $a = \liminf (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une valeur d'adhérence.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $a - \varepsilon \leq u_n^- \leq a$ (puisque $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers a).

Soit alors $m \geq \max(N, N')$: on a $a - \varepsilon \leq u_m^- \leq a$, et comme $u_m^- = \inf\{u_n ; n \geq m\}$, ceci implique l'existence de $n \geq m$ tel que $a - \varepsilon \leq u_m^- \leq u_n \leq u_m^- + \varepsilon \leq a + \varepsilon$, d'où $|u_n - a| \leq \varepsilon$, avec $n \geq N$.

- On montre de même que $\limsup (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une valeur d'adhérence. On pourrait aussi utiliser $-\liminf (-u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \limsup (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Montrons que si b est une autre valeur d'adhérence alors $b \geqslant \liminf (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En écrivant b comme la limite d'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante,

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$, donc $u_{\varphi(n)} \geqslant \underline{u}_n$,

donc $b \geqslant \liminf (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en passant à la limite. ∎