

Cours de L3 Mesure et intégration

Introduction: L'objectif dans cette UE est de vous présenter une théorie moderne de l'intégration et quelques unes de ses applications très utiles en analyse moderne également, pour pénétrer dans les mathématiques du XX^e siècle.

Ce que vous avez appris jusqu'à présent concernant l'intégration des fonctions est fondé sur l'intégrale de Riemann. Le but est de passer à un procédé d'intégration plus abstrait, dû pour l'essentiel à Lebesgue, qui étend celui de Riemann.

- Bernhard Riemann (1826-1866): mathématicien allemand du XIX^e siècle.
- Henri Lebesgue (1875-1941): mathématicien français du XX^e siècle.

L'intégration au sens de Lebesgue repose sur une notion cruciale, celle de mesure. Ce nom vient du fait que les mesures abstraites généralisent la mesure des longueurs, des aires et des volumes que l'on apprend en géométrie élémentaire (ou pas).

Ce qui rend les mesures abstraites difficiles à appréhender lorsqu'on les rencontre pour la première fois, c'est qu'elles peuvent être définies dans des cadres abstraits extrêmement généraux,

qui nécessitent de manipuler des familles infinies (et même non dénombrables) d'ensembles.

Plus précisément, on a recours à des familles d'ensembles appelées tribus (ou σ -algèbres, pour une raison que l'on expliquera dans le cours).

Les notions de tribu et de mesure constituent la partie la plus abstraite et néanmoins fondamentale de cette UE: elles doivent être absolument maîtrisées à la fin du semestre, et même avant!

Le contenu du cours va se diviser en quatre gros paquets:

- ① Outils de base : I) quelques compléments sur les suites réelles
II) opérations sur les ensembles III) fonctions
IV) dénombrabilité
- ② Tribus, mesures et fonctions mesurables
- ③ Intégration au sens de Lebesgue et gros théorèmes associés
- ④ Un peu d'analyse fonctionnelle : espaces L^p , convolution, transformation de Fourier.

Le début ① pourra paraître trop facile à certain(e)s et trop difficile à d'autre(s). C'est normal, tout dépend de votre cursus antérieur et de ce que vous en avez retenu.

Si c'est dur: accrochez vous, posez des questions, faites des exercices prétendument simples en les rédigeant consciencieusement.

Si c'est facile: prenez un peu d'avance et lisez en parallèle, par

exemple, le 1^{er} chapitre du livre de Rudin,

Analyse réelle et complexe. Faites des exercices supplémentaires.

Conseils généraux:

- consultez régulièrement vos mails @etu.univ-lyon1.fr et la page de l'UE licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a17:mesureintegration: page
- prenez soin de rédiger les solutions des exercices avec des mots: les symboles \Rightarrow , \Leftrightarrow , \forall , \exists sont à éviter absolument.
- prenez le plus de notes possibles: l'apprentissage des mathématiques passe (aussi) par les mains!

Ceci suppose de venir en cours et en TD, concentré(e):

les téléphones portables et ordinateurs restent dans les sacs.

- venez me voir en cas de problème, que ce soit à la pause, après les cours, ou dans mon bureau (Braconnier 241).

Nous travaillons en concertation avec Élise Fouassier, responsable de l'UE Topologie et équations différentielles.

N'attendez pas qu'il soit trop tard pour prendre conseil!

Modalités de contrôles des connaissances:

- des écrits: deux DS d'1h30 en cours de semestre, un contrôle final de 3h.
- des oraux: trois khôlles d'1h pour chaque étudiant(e).

Calcul de la note: $\frac{CC+CF}{2}$ avec $CC = \frac{kh+DS}{2}$,

kh = moyenne des 3 khôlles, DS = moyenne des 2 DS.