

Feuille n° 4 : Sommes de Riemann, intégrales

Exercice 1 (*) Calculer les limites des suites suivantes :

1. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$;
2. $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$;
3. $c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n}$;
4. $d_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$;
5. $e_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$;
6. $f_n = \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$;
7. $g_n = n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})} (1^1 2^2 3^3 \dots n^n)^{\frac{1}{n^2}}$.

Indication : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2 Soit $x \in D := \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, on pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2 \cos(t)x + 1) dt$.

1. Montrer que f est bien définie dans D .
2. Factoriser sur \mathbf{C} le polynôme $X^n - 1$.
3. Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.

Exercice 3 (*) Intégrales, parité et périodicité.

1. Soit $a > 0$. Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.
 - (a) Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
 - (b) Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
2. Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue sur \mathbf{R} et T -périodique.
 - (a) Montrer que pour tous réels a et b , $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx$.
 - (b) Montrer que pour tout réel a , $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Exercice 4 Soit f une application continue sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\int_0^1 \ln(f(t)) dt \leq \ln\left(\int_0^1 f(t) dt\right).$$

Exercice 5 Soit f continue sur $[0, 1]$, déterminer la limite de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (n-k) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx.$$

Exercice 6 Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f est à valeurs positives, et telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.
2. Montrer que f est de signe constant sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\int_a^b |f(t)| dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|.$$

Exercice 7 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| (a) (*) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ | (e) (*) $\int \frac{dx}{x^3-1}$ | (i) (*) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ |
| (b) (*) $\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx$ | (f) (*) $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$ | (j) $\int \frac{5x}{x^4+1} dx$ |
| (c) (*) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ | (g) (*) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ | (k) $\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5} dx$ |
| (d) $\int \frac{x}{x^2-4x+9} dx$ | (h) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} dx$ | |

Exercice 8 (*) Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\int_0^1 x e^{1+x^2} dx$ | (c) $\int_0^1 (x^3+1)e^{-x} dx$ | (e) $\int_0^{1/2} (\text{Arcsin } x)^2 dx$ |
| (b) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ | (d) $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ | (f) $\int_0^1 \frac{dx}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4}$ |

Exercice 9 (*) En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$I = \int_0^\pi x \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Exercice 10 (*) Primitives de polynômes et fractions rationnelles en cos et sin.

1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbf{R}, \cos^{2k} x = (1 - \sin^2 x)^k$, déterminer les primitives sur \mathbf{R} de $x \mapsto \cos^{2k+1} x$.
2. Calculer les primitives sur \mathbf{R} de $x \mapsto \cos^4 x$. *Indication : on pourra linéariser $\cos^4 x$.*
3. On veut calculer les primitives d'une fonction de la forme $R(\cos x, \sin x)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables.

Le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ permet toujours de se ramener au calcul des primitives d'une fraction rationnelle en t . Mais les calculs sont souvent assez lourds (et le degré du dénominateur assez élevé). On peut dans certains cas utiliser un autre changement de variable, donné par les *règles de Bioche* :

- si $R(\cos x, \sin x) dx$ est invariant par le changement de x en $\pi - x$, alors on pose $t = \sin x$;
- si $R(\cos x, \sin x) dx$ est invariant par le changement de x en $-x$, alors on pose $t = \cos x$;
- si $R(\cos x, \sin x) dx$ est invariant par le changement de x en $x + \pi$, alors on pose $t = \tan x$.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a) (*) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} & \text{(c) (*) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2 \cos x} & \text{(e) } \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan x}{1 + \sin(2x)} dx \\ \text{(b) (*) } \int_0^{\pi/6} \frac{\tan x dx}{1 + \sin^2 x} & \text{(d) } \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} & \text{(f) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 2 \tan^2 x} \end{array}$$

Exercice 11 Pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, on pose $B(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$; c'est la « fonction Beta ».

1. Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^2$. Comparer $B(p, q)$ et $B(q, p)$.
2. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, $B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$.
3. Calculer $B(0, n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. En déduire la valeur de $B(p, q)$ pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.

Exercice 12 (*) On note $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq e^{x/2}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+x^2} \leq e^{x/2}$.
2. Dessiner D .
3. Calculer l'aire de D .

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } \int_0^1 \ln(x^2 + 3) dx & \text{(d) } \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} & \text{(g) } \int_{-1}^1 \frac{dt}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n} \\ & \text{(poser } t = \sqrt{2}/x) & \text{(h) } \int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \text{(b) } \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx & \text{(e) } \int_2^3 x^2 \ln(x^6-1) dx & \text{(i) } \int_0^{\pi/4} \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ & \text{(poser } x = \cos \theta) & \text{(poser } t = x^3) \\ \text{(c) } \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} & \text{(f) } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx & \text{(j) } \int_0^2 \sqrt{\frac{t+7}{t+6}} dt \\ & \text{(poser } t = \sqrt{x+1}) & \end{array}$$

Exercice 14 (*)

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} (\sin x)^n dx = 0$.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx = 0$.

Exercice 15 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^{n-1} f(t) dt.$$

1. Montrer que $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
2. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n \rightarrow f(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Montrer que $\int_0^1 f(t) \sin(nt) dt \rightarrow 0$.

Exercice 16 Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

$$\text{où } a_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$