
Feuille n° 3 : Fractions rationnelles

Exercice 1 (*) Décomposer en éléments simples sur \mathbf{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X) = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} \quad ; \quad B(X) = \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} \quad ; \quad C(X) = \frac{1}{X(X - 1)^2}$$
$$D(X) = \frac{4}{(X^2 - 1)^2} \quad ; \quad E(X) = \frac{1}{X^4 - 1} \quad ; \quad F(X) = \frac{1}{X^n(X - 1)}.$$

Exercice 2 (*) Décomposer en éléments simples sur \mathbf{C} les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X) = \frac{1}{X^2 + X + 1} \quad ; \quad B(X) = \frac{X}{(X - 1)(X^2 + 1)^2}$$
$$C(X) = \frac{1}{(X + 1)(X^3 + 1)} \quad ; \quad D(X) = \frac{P(X)}{X^n - 1}, \quad \text{où } P \in \mathbf{C}_{n-1}[X].$$

Exercice 3 (*)

Décomposer la fraction $\frac{1}{X^{2n} + 1}$ en éléments simples sur \mathbf{C} puis sur \mathbf{R} .

Exercice 4 (*)

1. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X + 1)}$, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)}$.
2. Calculer de manière analogue les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{1 + k^2 + k^4} \quad ; \quad \sum_{k=3}^n \frac{2k - 1}{k(k^2 - 4)}.$$

Exercice 5

Calculer la dérivée d'ordre 28 de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X^2 + 1)}$.

Exercice 6

1. Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle irréductible de $\mathbf{C}(X)$. Montrer que si a est un pôle simple de F , alors la partie polaire associée à a est $\frac{P(a)}{Q'(a)(X - a)}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur \mathbf{C} la fraction $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on note $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Écrire la fraction rationnelle $F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X - \omega_k}$ sous forme irréductible $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$.

Exercice 8

On rappelle que $\mathbf{C}[X]$ peut-être vu comme un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}(X)$ grâce à l'identification $P(X) = \frac{P(X)}{1}$ pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que $V = \{F \in \mathbf{C}(X) \mid \deg F < 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}(X)$, puis montrer que $\mathbf{C}(X) = \mathbf{C}[X] \oplus V$.

Exercice 9

Soit H l'ensemble des fractions rationnelles $F \in \mathbf{C}(X)$ telles que $F\left(\frac{1}{X}\right) = F(X)$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}(X)$.
2. Soit $\Phi : \begin{cases} \mathbf{C}(X) & \rightarrow H \\ G & \mapsto G\left(X + \frac{1}{X}\right) \end{cases}$. Montrer que Φ est bien à valeurs dans H , et que c'est une application linéaire injective.
3. L'objectif de cette question est de montrer que Φ est un isomorphisme.
 - (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, il existe $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $R\left(X + \frac{1}{X}\right) = P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)$.
 - (b) Soient $F \in H$ et $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ tels que $F = \frac{P}{Q}$ soit la forme irréductible de F . Montrer que

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P\left(\frac{1}{X}\right)}{Q\left(\frac{1}{X}\right)} = \frac{P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)}{Q(X) + Q\left(\frac{1}{X}\right)}.$$

- (c) En déduire que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.