Ex 3 On prend $\mathcal{A} = \{]a,b] \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a<b \}$ qui est une famille dénombrable car il existe une injection de $\mathcal{A}$ à $\mathbb{Q}^2$.

On va montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A})$. Rappelons que

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\hat{\mathcal{A}})$ où $\hat{\mathcal{A}} = \{ U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ ouvert} \}$.

But : $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\hat{\mathcal{A}})$. En effet,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\hat{\mathcal{A}}) \text{ ssi } \begin{cases} \mathcal{A} \subset \sigma(\hat{\mathcal{A}}) & (\text{qui implique } \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\hat{\mathcal{A}})) \\ \hat{\mathcal{A}} \subset \sigma(\mathcal{A}) & (\text{qui implique } \sigma(\hat{\mathcal{A}}) \subset \sigma(\mathcal{A})) \end{cases}$$

D'un coté, $\mathcal{A} = \{]a,b] \mid a<b;\ a,b \in \mathbb{Q} \}$

$\subset \sigma(\hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ evident !

D'autre coté, $\forall U \in \hat{\mathcal{A}}$, U est un ouvert. Il faut montrer que

$U \in \sigma(\mathcal{A})$.

En effet. $\forall x \in U$, $\exists\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$ pour certain $\varepsilon > 0$.

On peut trouver $x_-, x_+ \in \mathbb{Q}$ t.q.

$x - \varepsilon < x_- < x < x_+ < x + \varepsilon$ puisque $\mathbb{Q}$ est danse dans $\mathbb{R}$.

Alors, $x \in]x_-, x_+] \subset U$. De plus,

$$U = \bigcup_{x \in U}]x_-, x_+] \quad \text{où}$$

$$\{]x_-, x_+] \mid x \in U \} \subset \{]a,b] \mid a<b;\ a,b \in \mathbb{Q} \} = \mathcal{A}$$

Donc, U est une union au plus dénombrable des intervalles dans $\mathcal{A}$. Selon la définition de tribu, $U \in \sigma(\mathcal{A})$.

D'ici, on conclut que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Ex 4 (1) $\sigma(\{A\}) = \{ \phi, X, A, A^c \}$

(2) $\mathcal{A} = \{ A \subset X \mid A_0 \subset A \}$ avec $A_0 \subset X$ fixé.

$\sigma(\mathcal{A}) = \{ A \subset X \mid$ soit $A_0 \subset A$, soit $A \subset A_0^c \}$

Notons $\mathcal{B} = \{ A \subset X \mid A_0 \subset A$ ou $A \subset A_0^c \}$. Il faut montrer que

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$$

Il suffit que ⟨I⟩ $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

⟨II⟩ $\mathcal{B}$ est une tribu $\Big\} \left(\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B} \right)$.

⟨III⟩ $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$

⟨I⟩ $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ évident!

⟨II⟩ $\mathcal{B}$ est une tribu

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{B}$

(b) si $A \in \mathcal{B}$, alors $A^c \in \mathcal{B}$

(c) si $A_n \in \mathcal{B}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q.

$$A_0 \subset A_m \Rightarrow A_0 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_0^c$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_0^c$$

On a toujours $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

⟨III⟩ $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$. $\forall A \in \mathcal{B}$, soit $A_0 \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{A})$

soit $A \subset A_0^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{A})$

Ex5 But : montrer que $\forall A \in \sigma(\mathcal{A})$, $\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ au plus dénombrable t.q. $A \in \sigma(\mathcal{B})$

Soit $\mathcal{C} = \{ A \in \sigma(\mathcal{A}) \mid \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ au plus dénombrable t.q. $A \in \sigma(\mathcal{B}) \}$.

Il suffit que $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{A})$.

D'un coté, $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{A})$ évident!

De l'autre coté, pour montrer que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$, on va montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ et que $\mathcal{C}$ est une tribu.

$\forall A \in \mathcal{A}$, on prend $\mathcal{B} = \{A\} \subset \mathcal{A}$ qui est fini. Immédiatement,

$$A \in \sigma(\mathcal{B})$$

Donc, $A \in \mathcal{C}$. c-à-d, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

De plus, $\mathcal{C}$ est une tribu car

(1) $\emptyset, X \in \sigma(\{A\})$ $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{C}$

(2) Si $A \in \mathcal{C}$ $\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ au plus dénombrable t.q.

$$A \in \sigma(\mathcal{B}) \Rightarrow A^c \in \sigma(\mathcal{B})$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$$

(3) Si $A_n \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$\exists \mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}$ au plus dénombrable t.q.

$$A_n \in \sigma(\mathcal{B}_n)$$

on prend $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ et on voit que

$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et que $\mathcal{B}$ est au plus dénombrable.

Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Voyons que $A_n \in \sigma(\mathcal{B}_n) \subset \sigma(\mathcal{B})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Alors, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{B})$.

Donc, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

On ainsi conclut que $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{A})$. $\square$

Ex6 (1) On prend $K_j = [-j, j]^n$ et note que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j\geq 0} [-j, j]^n.$$

(2) Si X est σ-compact, montrer que $\mathcal{B}(X) = \sigma(\text{compacts})$

Notons que $\mathcal{B}(X) = \sigma(\text{ouverts}) = \sigma(\text{fermés})$.

Donc, $\{\text{compacts}\} \subset \{\text{fermés}\}$ implique que

$$\sigma(\text{compacts}) \subset \sigma(\text{fermés}) = \mathcal{B}(X).$$

De plus, $\forall F \subset X$ fermé, on voit que

$$F = X \cap F = \Big(\bigcup_{j\geq 0} K_j\Big) \cap F = \bigcup_{j\geq 0} \underbrace{(K_j \cap F)}_{\text{compact}} \in \sigma(\text{compacts})$$

$$\Rightarrow \quad \{\text{fermés}\} \subset \sigma(\text{compacts})$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\mathcal{B}(X)}{\underset{\shortparallel}{\sigma(\text{fermés})}} \subset \sigma(\text{compacts})$$

Du coup, $\mathcal{B}(X) = \sigma(\text{compacts})$.

Ex7 (1) $A_x = \bigcap_{x \in A \in \mathcal{T}} A$ puisque $\mathcal{T}$ est une tribu au plus dénombrable

A_x est l'intersection au plus dénombrable des ensembles dans $\mathcal{T}$.

Donc, $A_x \in \mathcal{T}$.

(2) $\forall x, y \in X$, si $A_x \cap A_y = \phi$, OK!

sinon, $A_x \cap A_y \neq \phi$. Dans ce cas-là, si $x \notin A_x \cap A_y$

on a $x \in A_x \setminus A_y \in \mathcal{T}$. Alors $A_x \subset A_x \setminus A_y$ car

A_x est le + petit ensemble dans $\mathcal{T}$ qui contien x.

$$\Rightarrow \quad A_x \subset A_x \cap A_y^c \subset A_y^c \Rightarrow A_x \cap A_y = \phi \quad \text{contradiction!}$$

Du coup, $x \in A_x \cap A_y \neq \phi$ et $A_x \subset A_x \cap A_y \subset A_x$

Similairement pour y, $A_y \subset A_x \cap A_y \subset A_y$ $(y \in A_x \cap A_y)$.

Par conséquent, $A_x = A_x \cap A_y = A_y$.

(3) $\underset{\subset \mathcal{T}}{\{A_x,\ x \in X\}} = \{B_i,\ i \in I\}$ t.q. $\forall x \in X\ \exists i_x \in I,\ A_x = B_{i_x}$

et que B_i sont 2-à-2 disjoints.

Donc

$\cancel{A}$ $X = \bigcup_{x\in X} A_x = \bigcup_{i\in I} B_i = \bigsqcup_{i\in I} B_i$ et $\mathcal{T}$ au plus dénombrable $\Rightarrow I$ est au plus dénombrable

(4) Soit $\mathcal{C} = \{\bigcup_{i\in J} B_i \mid J\subset I\}$. On va montrer que

$\mathcal{C}\subset\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}\subset\mathcal{C}$.

En effet, $\forall B\in\mathcal{C}$, $B=\bigcup_{i\in J} B_i$ pour certain $J\subset I$ avec $B_i\in\mathcal{T}$ (car $A_x\in\mathcal{T}$)

J est au plus dénombrable car I l'est, donc

$$B\in\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{C}\subset\mathcal{T}$$

De plus, $\forall A\in\mathcal{T}$, $A = A\cap X = A\cap\left(\bigcup_{x\in X} A_x\right)$

$$= \bigcup_{x\in A} A_x = \bigcup_{i\in J_A} B_i$$

où $J_A = \{j\in I \mid \exists x\in A \text{ t.q. } A_x = B_j\}\subset I$

On a alors que $A\in\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{T}\subset\mathcal{C}$.

(5). $X=\{1,2,\cdots,n\}$

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur X, $\mathcal{T}\subset\mathcal{P}(X)$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))=2^n$.

Donc $\mathcal{T}$ est une tribu finie, qui est forcément engendrée par une partition au plus dénombrable de X. Plus précisement,

$\exists$ une bijection entre $\{\mathcal{T} \mid \mathcal{T}: \text{tribu sur } X\}$ et $\{\text{partitions de } X\}$.

$\boxed{\text{Ex 8}}$ (1) Soit $X=\bigsqcup_{i\in I} B_i$. $\sigma(B_i, i\in I) = \{\bigcup_{i\in J} B_i \mid J\subset I, J \text{ au plus dénombrable ou } J^c \text{ au plus dénombrable}\} =: \mathcal{T}$.

On va montrer que $\sigma(B_i, i\in I) = \mathcal{T}$.

$\forall B \in \mathcal{T}$, $B = \bigcup_{i \in J} B_i$ où $J \subset I$ t.q. soit J au plus dénombrable
soit J^c au plus dénombrable.

Si J est au plus dénombrable, $B = \bigcup_{i \in J} B_i \in \sigma(B_i, i \in I)$

si J^c est au plus dénombrable, $B^c = \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \Big\backslash \left(\bigcup_{i \in J} B_i\right)$

$$= \bigcup_{i \in J^c} B_i \in \sigma(B_i, i \in I)$$

Donc $B \in \sigma(B_i, i \in I)$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\mathcal{T} \subset \sigma(B_i, i \in I)}$$

D'autre coté, $B_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$. on va montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.

en ~~notant~~ que $\left\{ \begin{array}{l} \{B_i, i \in I\} \subset \mathcal{T} \\ \mathcal{T} \text{ tribu} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\sigma(B_i, i \in I) \subset \mathcal{T}}$.

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ (évident en prenant $J = \emptyset$).

(b) si $B \in \mathcal{T}$, $B = \bigcup_{i \in J} B_i$ soit J au plus dénombrable

$$J = (J^c)^c \Rightarrow \underbrace{\bigcup_{i \in J^c} B_i}_{= B^c} \in \mathcal{T}$$

soit J^c au plus dénombrable

$$\Rightarrow B^c = \bigcup_{i \in J^c} B_i \in \mathcal{T}.$$

(c) Si $A_n \in \mathcal{T}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$\exists$ $J_n \subset I$ t.q. $A_n = \bigcup_{i \in J_n} B_i$ $\forall n \in \mathbb{N}$

et que soit J_n au plus dénombrable
soit J_n^c au plus dénombrable.

Si J_n est au plus dénombrable $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{i \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n} B_i \quad \text{avec } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \text{ au plus dénombrable}$$

$\in \mathcal{T}$.

Si $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. J_m^c est au plus dénombrable.

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{i\in(\bigcup_n J_n)^c} B_i = \bigcup_{i\in\bigcap_{m\in\mathbb{N}} J_n^c} B_i \quad \text{avec} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n^c \subset J_m^c$$

au plus dénombrable

$$\in \mathcal{T}$$

et par (b), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Si $I = X$, $B_x = \{x\}$. $X = \bigsqcup_{x\in X} \{x\}$.

$\sigma(B_x ; x\in X) = \{ A \subset X \mid A$ au plus dénombrable ou A^c au plus dénombrable$\}$

(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \sigma($ partition de $\mathbb{R})$.

Si $\exists$ une partition $\mathbb{R} = \bigsqcup_{i\in I} B_i$ t.q. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(B_i, i\in I)$, alors

$\{x\} = \bigcup_{i\in J} B_i$ avec J au plus dénombrable ou J^c — — — — — .

Forcément $\mathrm{Card}(J) = 1$ et $B_i = \{x\}$ pour certain $i \in I$.

Donc $\{\{x\}; x\in\mathbb{R}\} \subset \{B_i, i\in I\}$ ~~or~~ Or $\mathbb{R} = \bigsqcup_{x\in X}\{x\}$ est une partition. Du coup, $\{\{x\}; x\in\mathbb{R}\} = \{B_i ; i\in I\}$.

et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{x\}, x\in\mathbb{R})$

$= \{A\subset\mathbb{R} \mid A$ au plus dénombrable ou A^c — — — — — — $\}$

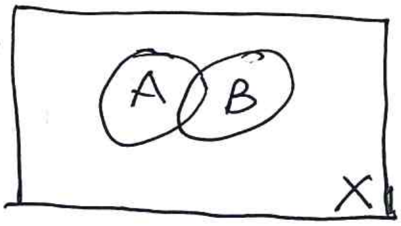
Or $[0,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $[0,1]^c =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ni $[0,1]$ ni $[0,1]^c$ est au plus dénombrable.

C'est une contradiction!

$\square$

$\boxed{\text{Ex9}}$ (1)



$$\sigma(\{A\}) = \{\phi, X, A, A^c\}$$

$$\sigma(\{B\}) = \{\phi, X, B, B^c\}$$

Notons que $\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\}) = \{\phi, X, A, A^c, B, B^c\}$

n'est pas une tribu car

$A \cup B \notin \sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\})$.

(2) $\mathcal{T}_n = \sigma(\mathcal{P}(\{0, \dots, n\}))$ sur $\mathbb{N}$

$= \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}, \{n+1, n+2, \dots\})$

$\subset \mathcal{T}_{n+1}$. En effet,

$\forall k \leq n, \quad \{k\} \in \mathcal{T}_{n+1}$

$$\{n+1, n+2, \dots\} = \underbrace{\{n+1\}}_{\in \mathcal{T}_{n+1}} \cup \underbrace{\{n+2, n+3, \dots\}}_{\in \mathcal{T}_{n+1}} \in \mathcal{T}_{n+1}.$$

$\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu. Si on prend

$$A = \{2k ; k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad \text{avec } A_k = \{2k\}$$

Notons que $A_k \in \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$ car $A_k \in \mathcal{T}_{2k}$.

mais $A \notin \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$. Sinon, $A \in \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n \Rightarrow \exists\, N \geq 0$ t.q.

$\{2n ; n \in \mathbb{N}\} = A \in \mathcal{T}_N$ impossible!

On a que $A_k \in \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n \not\Rightarrow \bigcup_{k \geq 0} A_k \in \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$.

$\boxed{\text{Ex10}}$

(1) Étant donné $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut définir une fonction

$$f = \limsup_n \chi_{A_n} \quad \text{t.q.}$$

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \limsup_n \chi_{A_n}(x)$$

Si f est une fonction indicatrice, $B = f^{-1}(\{1\})$

$$:= \limsup_n A_n$$

Si f n'est pas une fonction indicatrice, cette définition de $\limsup_n A_n$ n'a pas de sens.

Donc, cette definition a un sens

$\iff$ $f = \limsup_n \chi_{A_n}$ est une fonction indicatrice

$\iff$ $f(x) \in \{0,1\} \quad \forall x \in X.$

En effet, $\forall x \in X$,

$$\{\chi_{A_n}(x) \; ; n \in \mathbb{N}\} \subset \{0,1\}$$

Donc, $\limsup_n \chi_{A_n}(x) \in \{0,1\}$ (tous les points d'adhérence sont dans $\{0,1\}$).

$\Rightarrow$ $f(x) \in \{0,1\}$.

$\square$