Université Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de Mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Année 2016-2017

Tribus
Feuille 2

Exercice 2 Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} = \{A \subset \mathbb{R}\,;\ A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.
4. Plus difficile : même conclusion si on remplace $\mathbb{R}$ par tout ensemble non dénombrable.

On s'intéresse uniquement à la question 4. Il s'agit de montrer que *tout ensemble non dénombrable X contient une partie non dénombrable dont le complémentaire n'est pas dénombrable.*

Pour cela, on va apparier les éléments de X et en mettre un sur deux dans la partie cherchée, un sur deux dans son complémentaire. Autrement dit, on va montrer que X admet une partition dont toutes les parts sont des paires [1]. Facile à dire, laborieux à mettre en place.

On appelle *couplage partiel* sur un ensemble X une partie P de $\mathscr{P}(X)$ dont tous les éléments (qui sont donc des parties de X) sont des paires disjointes. Ainsi, $P \subset \mathscr{P}(X)$ est un couplage partiel si :
— pour tout $A \in P$, $\#A = 2$;
— pour tous $A, B \in P$, $A \cap B = \emptyset$ ou $A = B$.

Exemple 1. Pour $X = \mathbb{N}$, on peut prendre par exemple :
— $P_1 = \big\{\{2,3\}, \{4,5\}, \cdots\big\}$;
— $P_2 = \big\{\{0,1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \cdots\big\}$;
— $P_3 = \big\{\{1,2\}, \{5,6\}, \{11,13\}\big\}$.
On voit que $P_1 \subset P_2$ mais que P_3 n'est pas comparable à P_1 ni à P_2.

On veut appliquer le lemme de Zorn. Pour cela, il y a une condition technique à vérifier.

> L'inclusion sur l'ensemble $\mathscr{C}$ des couplages partiels est un ordre inductif : si $(P_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée de couplages partiels [2], alors la réunion $\bigcup_{i\in I} P_i$ est un couplage partiel. En effet, les éléments de cette réunion appartiennent à l'un des P_i donc ce sont des paires. D'autre part, soient p et q deux paires de la réunion, alors il existe i (resp. j) dans I tel que $p \in P_i$ (resp. $q \in P_j$). Si par exemple $P_i \subset P_j$, alors p et q appartiennent au couplage P_j donc elles sont disjointes ou égales.

D'après le lemme de Zorn, l'ensemble des couplages partiels admet un élément maximal, notons-le P.

Soit $U = \bigcup_{p\in P} p$: c'est l'ensemble des éléments de P qui appartiennent à une paire. Remarquons que U est X ou X privé d'un point :

$$\#(U^c) \leq 1$$

1. Une paire est un ensemble de cardinal 2.
2. C'est-à-dire que pour i et j quelconques dans I, on a $P_i \subset P_j$ ou $P_j \subset P_i$.

(informellement, on peut dire que P apparie tous les éléments sauf éventuellement un). En effet, s'il y avait au moins deux éléments a et b hors de U, le couplage $P \cup \big\{\{a,b\}\big\}$ contiendrait strictement P, ce qui contredirait la maximalité de P.

On peut aussi remarquer que P n'est pas dénombrable, sans quoi X serait une réunion dénombrable d'ensembles finis donc X serait dénombrable.

Premier cas : $U = X$. On choisit un élément dans chaque paire de P. Formellement, l'axiome du choix permet de choisir une fonction $f : P \to X$ telle que pour tout $p \in P$, $f(p) \in P$. Pour $p \in P$, on note $g(p)$ l'autre élément de p, c'est-à-dire que $p = \{f(p), g(p)\}$. Alors les parties

$$A = \big\{f(p),\ p \in P\big\} \quad \text{et} \quad B = \big\{g(p),\ p \in P\big\}$$

sont complémentaires car tout élément de X appartient à au plus une paire de P par définition d'un couplage et à au moins une paire de P car $U = X$. De plus, les ensembles A et B ne sont pas dénombrables car ils sont en bijection avec P.

Deuxième cas : $X = U \cup \{a\}$ avec $a \notin U$. On prend alors :

$$A = \big\{f(p),\ p \in P\big\} \cup \{a\} \quad \text{et} \quad B = \big\{g(p),\ p \in P\big\}.$$

Pour ce deuxième cas, on peut aussi construire un couplage Q tel que $\bigcup_{q \in Q} q = X$. Voici une façon de procéder. Choisissons dans P une partie dénombrable $P_0 = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ et soit P' son complémentaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, on nomme x_n et y_n les éléments de p_n. Autrement dit,

$$P_0 = \big\{\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \ldots\big\}.$$

On peut alors prendre :

$$Q = \big\{\{a, x_0\}, \{y_0, x_1\}, \{y_1, x_2\}, \{y_2, x_3\}, \{y_3, x_4\}, \ldots\big\} \cup P'.$$