

Chapitre IV : Dénombrabilité

On rappelle que deux ensembles sont dits **équipotents** s'il existe une **bijection** de l'un sur l'autre.

Notation: pour tout $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\llbracket 1, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$.

① Ensembles finis

Définition: On dit qu'un ensemble A est **fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit équipotent à $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Lemme: Soient n et $m \in \mathbb{N}^*$. Il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ si et seulement si $n \leq m$.

Démonstration: • si $n \leq m$ alors $\llbracket 1, n \rrbracket \subset \llbracket 1, m \rrbracket$ et $i: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$
 $k \mapsto k$
 est une injection.

• Réciproquement, pour montrer que nécessairement $n \leq m$ s'il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$, on peut procéder par récurrence sur n . Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer: $n \geq 1$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$!

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ on ait $n \leq m$. (Noter que cette hypothèse de récurrence porte sur n et non sur m !). On veut montrer que cette propriété est vraie pour $n+1$.

Si il existe une injection $i: \llbracket 1, n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors $m \geq 2$ (sinon on aurait $i(1) = i(n+1) = 1$ avec $i \neq n+1$ et i ne serait pas injective).

* Si $i(n+1) = m$ alors $i|_{\llbracket 1, n \rrbracket}: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ est encore une injection.

Donc $n \leq m-1$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a donc bien $n+1 \leq m$.

* Si $i(n+1) \neq m$, soit φ la transposition entre m et $i(n+1)$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Alors $\varphi \circ i: \llbracket 1, n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ est une injection car φ est bijective, et $(\varphi \circ i)(n+1) = m$. D'après le cas précédent, ceci implique $n+1 \leq m$. $\square$

Conséquence: Les ensembles $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, m \rrbracket$ sont équipotents ssi $n = m$.

En effet, si $n = m$ ils sont égaux donc équipotents. S'ils sont équipotents, il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ et une injection de $\llbracket 1, m \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Donc $n \leq m$ et $m \leq n$ d'après le lemme. Par suite $n = m$. $\square$

Par suite, pour tout ensemble fini non vide A il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit équipotent à $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On appelle cet entier le cardinal de A , et on le note $\#(A)$.

On pose de plus $\#(\emptyset) = 0$.

Autrement dit, $\#(A)$ est le nombre d'éléments de A !

Si A est non vide, on peut numérotier les éléments de A de 1 à $n = \#(A)$ en posant $a_k = \varphi(k)$, ^{pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$} où $\varphi: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow A$ est une bijection.

Ainsi $A = \{a_k; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

Si A est un sous-ensemble d'un ensemble E , on peut aussi écrire $\#(A)$ à l'aide de la fonction indicatrice de A :

$$\chi_A: E \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

$$\#(A) = \sum_{x \in E} \chi_A(x). \quad \left(\text{Cette somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls et a donc bien un sens, lorsque } A \text{ est fini.} \right)$$

Propriétés du cardinal (vérifications laissées en exercice)

- si $A \subset E$ avec E fini, alors A est fini, $E \setminus A$ aussi et l'on a $\#(E \setminus A) = \#(E) - \#(A)$.
- (reformulation) si A et B sont deux ensembles finis disjoints alors $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.
- Plus généralement, pour deux ensembles A et B finis, on a $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$,
- Et $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$.

IV

Proposition : si E est un ensemble fini alors l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\#(\mathcal{P}(E)) = 2^{\#(E)}$.

Démonstration : en écrivant $E = \{e_k; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ on peut définir

$$\psi: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0,1\}^n$$

$$A \longmapsto (X_A(e_1), \dots, X_A(e_n)), \quad \text{avec } n = \#(E).$$

On sait d'après la propriété sur le cardinal d'un produit cartésien (itérée) que $\#(\{0,1\}^n) = (\#\{0,1\})^n = 2^n$.

Or on peut montrer que ψ est une bijection :

- si $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $\psi(A) = \psi(B)$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_A(e_k) = X_B(e_k)$, ce qui implique que $e_k \in A$ si et seulement si $e_k \in B$. Cela signifie que $A = B$. Donc ψ est injective.
- Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$. Soit alors $I = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket; \alpha_k = 1\}$, et $A = \{e_i; i \in I\}$. On a $\psi(A) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Donc ψ est surjective. □

② Ensembles dénombrables

Définition : Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Autrement dit, en posant $a_k = \psi(k)$ ^{pour tout $k \in \mathbb{N}$} ou $\psi: \mathbb{N} \longrightarrow A$ est une bijection, on peut écrire $A = \{a_k; k \in \mathbb{N}\}$, les a_k étant deux à deux distincts.

"Inversement", un ensemble $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ est ce qu'on appelle au plus dénombrable, c'est-à-dire fini - si la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs - ou dénombrable. On y reviendra plus loin.

Exemples d'ensembles dénombrables

- $\mathbb{N}^*$ (bien qu'il semble avoir "un élément de moins" que $\mathbb{N}$),
car $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n-1$ est une bijection, de réciproque
 $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$
 $m \mapsto m+1$!
- Plus généralement, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus [0, n]$ est
dénombrable, car $\varphi: \mathbb{N} \setminus [0, n] \rightarrow \mathbb{N}$
 $k \mapsto k-n-1$ est une bijection,
de réciproque $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus [0, n]$
 $m \mapsto m+n+1$.
- Plus étonnant, bien qu'apparemment "deux fois plus gros" que $\mathbb{N}$,
 $\mathbb{Z}$ est dénombrable, car $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto a_n = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$
est bijective, de réciproque $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
 $m \mapsto \begin{cases} -2m & \text{si } m \in -\mathbb{N}, \\ 2m-1 & \text{si } m \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Remarque: Dès qu'un ensemble admet un sous-ensemble non dénombrable il est non dénombrable. On le justifiera plus loin.

Exemples d'ensembles non dénombrables:

L'intervalle $[0, 1[$ n'est pas dénombrable, comme on va le montrer,
et donc $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$ ^{$d \in \mathbb{N}^*$} ne sont pas dénombrables.

Montrons que $[0,1[$ n'est pas dénombrable, en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $[0,1[= \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Pour tout $x \in [0,1[$ il existe un unique développement décimal propre, c'est-à-dire que l'on peut écrire $x = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k 10^{-k} = 0, p_1 p_2 \dots p_n \dots$ avec $p_k \in \{0, \dots, 9\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $m \geq N$ tel que $p_m \neq 9$.

Cette écriture décimale s'applique donc à chacun des a_n , $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite d'entiers entre 0 et 9, $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ (on la fait commencer à 0 juste par commodité) telle que

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} 10^{-k-1} = 0, a_{n,0} a_{n,1} \dots a_{n,m} \dots$$

Considérons la fonction $\psi: \{0, \dots, 9\} \longrightarrow \{1, 2\}$

$$m \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } m \neq 1, \\ 2 & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Par construction, on a $\psi(m) \neq m$ quel que soit $m \in \{0, \dots, 9\}$ ($= \mathbb{I}[0, 9]$).

On peut alors définir le nombre

$$b = \sum_{k=0}^{+\infty} \psi(a_{k,k}) 10^{-k-1} = 0, \psi(a_{0,0}) \psi(a_{1,1}) \dots \psi(a_{n,n}) \dots$$

Puisque ψ ne prend pas la valeur 9, on a $b < 1$.

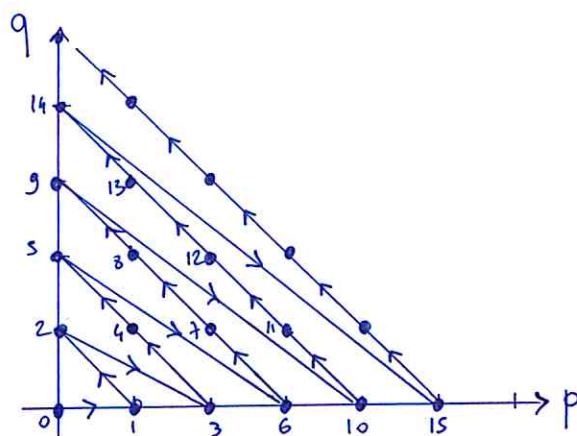
Par suite $b \in [0,1[= \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. On devrait donc avoir un entier n tel que $b = a_n$, ie $0, \psi(a_{0,0}) \psi(a_{1,1}) \dots \psi(a_{n,n}) \dots = 0, a_{n,0} a_{n,1} \dots a_{n,m} \dots$.

Or $\psi(a_{n,n}) \neq a_{n,n}$. Ceci contredit donc l'unicité du développement décimal propre, puisque ψ ne prend pas la valeur 9.

Conclusion: $[0,1[$ n'est pas dénombrable. ■

Proposition: le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable!

Démonstration: L'idée est de "parcourir" $\mathbb{N}^2$ de sorte à définir une suite $((p_m, q_m))_{m \in \mathbb{N}}$ dont les valeurs (p_m, q_m) sont deux à deux distinctes et décrivent tout $\mathbb{N}^2$.



On pose $(p_0, q_0) = (0, 0)$, $(p_1, q_1) = (1, 0)$, $(p_2, q_2) = (0, 1)$, et par récurrence:

$$\begin{cases} p_{m+1} = p_m - 1, & q_{m+1} = q_m + 1 & \text{si } p_m \neq 0, \\ p_{m+1} = q_m + 1, & q_{m+1} = 0 & \text{si } p_m = 0. \end{cases}$$

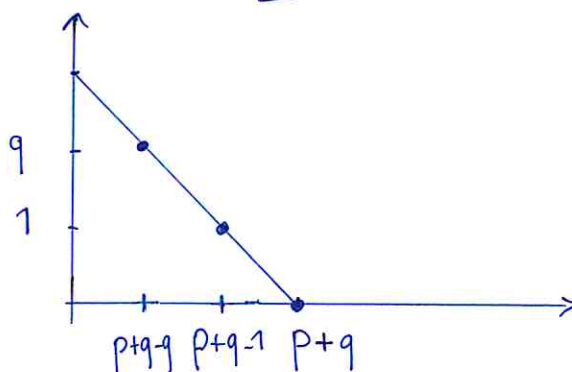
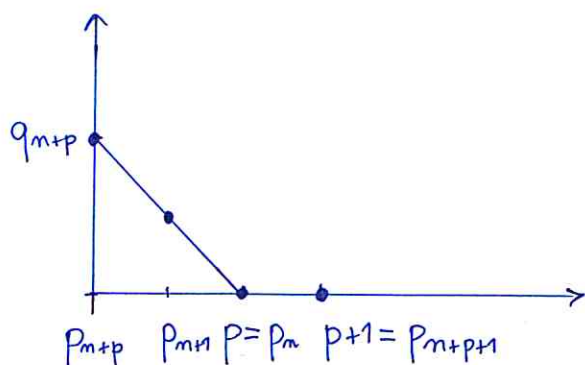
"Intuitivement", on parcourt ainsi tout $\mathbb{N}^2$, une fois et une seule. Pour le démontrer, il faut trouver la bijection réciproque $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(p_m, q_m) = m$, pour tout m . On constate que $\# \{ (p, q) \in \mathbb{N}^2 ; p+q = m \} = m+1$, quel que soit m .

Pour suite, si $(p, 0) = (p_m, q_m)$, alors $(p+1, 0) = (p_{m+p+1}, q_{m+p+1})$, ce qui impose $f(p+1, 0) = f(p, 0) + p + 1$ (voir dessin ci-dessous à gauche).

En outre, si $(p+q, 0) = (p_m, q_m)$, alors $(p, q) = (p_{m+q}, q_{m+q})$, ce qui impose $f(p, q) = f(p+q, 0) + q$. (voir dessin ci-dessous à droite).

On trouve ainsi, quel que soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$f(p, q) = f(p+q, 0) + q = \sum_{i=0}^{p+q} i + q = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q.$$



Ceci se généralise ainsi.

Proposition: tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration: le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable, car si $\varphi: A \rightarrow \mathbb{N}$ et $\psi: B \rightarrow \mathbb{N}$ sont des bijections, alors $f: A \times B \rightarrow \mathbb{N}^2$
 $(a, b) \mapsto (\varphi(a), \psi(b))$ est une bijection, donc $A \times B$ est équipotent à $\mathbb{N}^2$ donc à $\mathbb{N}$ d'après la proposition précédente.

On montre ensuite par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si des ensembles $A_1, \dots, A_n$ sont dénombrables alors $\prod_{k=1}^n A_k$ aussi.

□

Attention, un "produit infini d'ensembles" dénombrables ne l'est pas nécessairement.

Par exemple $[0, 9]^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites d'entiers comprises entre 0 et 9. Il contient l'ensemble des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq N$ pour lequel $p_n \neq 9$. Celui-ci est équipotent à $[0, 1[$ via les développements décimaux propres, dont on a montré qu'il n'était pas dénombrable.

③ Ensembles au plus dénombrables

Comme évoqué plus haut, on a la:

Définition: Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

C'est le cas de toute partie de $\mathbb{N}$ par exemple.

Proposition: Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable, et plus précisément, si A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle est finie si majorée, et dénombrable sinon.

On rappelle que toute partie ^(non vide) de $\mathbb{N}$ est minorée.

Démonstration: Soit $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$.
on définit par récurrence la suite (a_k) d'entiers et la suite A_k de parties de $\mathbb{N}$ par $a_0 = \min A$, $A_0 = \{a_0\}$, et pour tout $m \in \mathbb{N}$, tant que $A \setminus A_m \neq \emptyset$, $a_{m+1} = \min(A \setminus A_m)$, $A_{m+1} = \{a_{m+1}\} \cup A_m$.

Si l'on atteint $N \in \mathbb{N}$ tel que $A = A_N$, alors $\llbracket 0, N \rrbracket \rightarrow A$
 $n \mapsto a_n$ est une
bijection strictement croissante, $a_N = \max A$ et $\#(A) = N+1$.

Si pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A \setminus A_m \neq \emptyset$, alors $\mathbb{N} \rightarrow A$
 $n \mapsto a_n$ est une
bijection strictement croissante, et A n'est pas majorée sinon elle aurait un plus grand élément a_N , et on ne pourrait pas avoir $a_{N+1} > a_N$.

Corollaire: Etant donné un ensemble A ,

1) s'il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$, alors A est au plus dénombrable.

2) s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans A , _____
_____.

Démonstration: 1) si $i: A \rightarrow \mathbb{N}$ est injective, alors $i(A)$ est une partie de $\mathbb{N}$, donc au plus dénombrable, et i définit une bijection de A sur $i(A)$, donc A est finie si $i(A)$ est finie, et dénombrable si $i(A)$ l'est.

2) si $s: \mathbb{N} \rightarrow A$ est surjective, on peut définir $i: A \rightarrow \mathbb{N}$ par $i(a) = \min s^{-1}(\{a\})$, puisque quel que soit $a \in A$, $s^{-1}(\{a\})$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide du fait que s est surjective. De plus, $s(i(a)) = a$ par th. Donc i est injective, donc A est au plus dénombrable d'après 1).

Proposition: si $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles au plus dénombrables alors $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ est au plus dénombrable.

Remarque: en appliquant ce résultat à une famille stationnaire, c'est-à-dire telle que $A_m = A_N$ pour tout m supérieur à un certain rang N , on en déduit que toute réunion d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Démonstration: pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut écrire $A_m = \{a_{m,j}; j \in \mathbb{N}\}$, de sorte que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m = \{a_{m,j}; j \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$.

Ainsi on a une surjection $\mathbb{N}^2 \longrightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$
 $(m,j) \longmapsto a_{m,j}$.

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit qu'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$, qui est donc au plus dénombrable. $\square$

Exemple: $\mathbb{Q} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \right\}$.

Quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \right\}$ est équipotent à $\mathbb{Z}$, qui est dénombrable. Donc $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable. Comme il n'est pas fini puisqu'il contient $\mathbb{Z}$, il est dénombrable.