Chapitre III : Fonctions

Une fonction désigne un objet mathématique reposant sur

- un ensemble de départ X,
- un ensemble d'arrivée Y,
- une "flèche", qui à tout élément de X permet d'associer un unique élément de Y.

Une fonction f se note ainsi $f : X \longrightarrow Y$
$$x \longmapsto f(x).$$

Il est crucial de bien faire la différence entre la fonction f et sa valeur $f(x)$ au point x, càd l'image de x par f.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$, $x \longmapsto \sin x$

ne sont pas les mêmes fonctions !
Lorsqu'on parle simplement de la fonction sinus, on pense généralement plutôt à f. Les suites sont des fonctions dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ (ou un sous-ensemble de $\mathbb{N}$).

1) Image directe, image réciproque

Etant donnés une fonction $f : X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f(x)$ et des ensembles $A \subset X$, $B \subset Y$,

on définit l'image directe de A par f comme l'ensemble des images par f des éléments de A :
$$f(A) = \{ y \in Y \,;\, \text{il existe } a \in A, y = f(a) \} = \{ f(a) \,;\, a \in A \},$$

et l'image réciproque de B par f comme l'ensemble des antécédents des éléments de B par f : $f^{-1}(B) = \{ x \in X \,;\, f(x) \in B \}$.

Exemple : pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$, I un intervalle de longueur $|I| \geq 2\pi$, on a $f(I) = [-1,1]$. Par ailleurs, $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{0\}) = \pi\mathbb{Z}$ ...

Propriétés (vérification laissée en exercice)

Etant donnés une fonction $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$, des familles d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ avec $A_i \subset X$ pour tout $i \in I$ et $(B_j)_{j\in J}$ avec $B_j \subset Y$ pour tout $j \in J$, $A \subset X$ et $B \subset Y$, on a :

- $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
- $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, et pas d'inclusion du tout en général* entre $f(X \setminus A)$ et $Y \setminus f(A)$.

* par exemple pour $f : \{x_1, x_2, x_3\} \longrightarrow \{y_1, y_2\}$, $x_i \longmapsto y_1$ quel que soit i,

$A = \{x_1, x_2\}$, $X \setminus A = \{x_3\}$, $f(X \setminus A) = \{y_1\} = f(A)$, $Y \setminus f(A) = \{y_2\}$.

② Injections

Définition : Une injection est une fonction injective, càd telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent.

Autrement dit, $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ est injective si, quel que soit $y \in Y$, il existe au plus un élément x de X tel que $y = f(x)$.

Exemple : $h : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ est injective, mais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ ne l'est pas

Pour démontrer qu'une fonction $f : \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ est injective, on procède généralement ainsi : on montre que quels que soient x_1 et $x_2 \in X$, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.

NB : pour ceci on commence par « Soient $x_1 \in X, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ Montrons que $x_1 = x_2$. »

③ Surjections

Définition : Une surjection est une fonction surjective, càd telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent.
Autrement dit, $f : \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ est surjective si, quel que soit $y \in Y$, il existe au moins un élément x de X tel que $y = f(x)$. Ou encore : $f(X) = Y$.

Exemple : $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ x \mapsto \sin x \end{array}$ est surjective, mais pas $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$.

④ Bijections

Définition : Une bijection est une fonction à la fois injective et surjective, càd telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée a exactement un antécédent.
Autrement dit, $f : \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ est bijective si, quel que soit $y \in Y$, il existe un unique élément x de X tel que $y = f(x)$.

Définition : si $f : \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ est bijective on définit sa fonction réciproque $f^{-1} : \begin{array}{l} Y \to X \\ y \mapsto f^{-1}(y) \end{array}$ en posant, quel que soit $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ comme étant l'unique antécédent de y par f.

<u>Exemple :</u> la fonction $k : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ est bijective

$$x \longmapsto \sin x$$

et sa réciproque est la fonction $k^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$y \longmapsto \arctan y .$$

Quand on parle simplement de la fonction arctan, on pense généralement à cette dernière.

<u>Définition</u> : Lorsqu'il existe une bijection entre deux ensembles, on dit que ces ensembles sont équipotents.

<u>Exemple</u> : $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ sont équipotents, car $\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$

$$n \longmapsto 2n$$

est une bijection.