Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 7

Suites réelles

Exercice 1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On note $-A = \{ -a \,|\, a \in A \}$.
   (a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup -A$ existe et que dans ce cas $\inf A = -\sup -A$.
   (b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf -A$ existe et que dans ce cas $\sup A = -\inf -A$.
2. Soit $B \subset A$ non vide.
   (a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leq \sup A$.
   (b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geq \inf A$.

Exercice 2. Déterminer pour les ensembles qui suivent s'ils possèdent des bornes supérieure et inférieure. Le cas échéant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

(1) $[0, 1[$

(2) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\}$

(3) $\left\{ \frac{m}{mn+1} \;\middle|\; (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star \right\}$

(4) $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$

Exercice 3.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
   Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $D \subset \mathbb{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell > 0$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N \geq N_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes.
Montrer que la suite $(\max(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 6. Étudier la convergence des suites suivantes :

(a) $(u_n) = \left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$

(b) $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\left(n - \dfrac{1}{n}\right) - n^2\right)$

(c) $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{2}{n^2}\right)^3 - n^3\right)$

(d) $(u_n) = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$

(e) $(u_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$

(f) $(u_n) = \left(\frac{2n^6+5n+1}{n^6-1}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$.

Exercice 7. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\,.$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Qu'en est-il si $\ell \neq 0$?

Exercice 9. *Suites arithmético-géométriques.*
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $u^{(0)} \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n). Indication : on distinguera les cas $|a| < 1$, $|a| > 1$ et $a = -1$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 10. Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels distincts a et b tels que $(u^a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u^b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+2} = -2\mu\ u_{n+1} - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)\ u_n\ .$$
2. Montrer que, pour tout $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(\lambda_a, \lambda_b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$u_0 = \lambda_a\ u^a_0 + \lambda_b\ u^b_0 \qquad \text{et} \qquad u_1 = \lambda_a\ u^a_1 + \lambda_b\ u^b_1\ .$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2\mu\ u_{n+1} - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)\ u_n$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n à l'aide de (u_0, u_1, a, b, n).
   (b) Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 11.

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$. Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$18ab - 3ac - bc \;=\; 0$$

et que, de plus, $c > 0$.

2. Il existe donc une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^\star)^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$18u_nu_{n+1} - 3u_nu_{n+2} - u_{n+1}u_{n+2} \;=\; 0\ .$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Vérifier que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

   (b) En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Discuter la convergence de (u_n).

Exercice 12. On rappelle que
– pour tout $a > 1$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$;
– pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;
– pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
Étudier la convergence des suites suivantes :
(1) $(u_n) = (n(-1)^n)$
(2) $(u_n) = \left(\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}\right)$
(3) $(u_n) = (\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$
(4) $(u_n) = \left(2 + \frac{\sin(n)-4}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$
(5) $(u_n) = (n^{\frac{1}{\ln n}})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$
(6) $(u_n) = \left(\frac{(-5)^n+n}{3^n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$
(7) $(u_n) = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

Exercice 13. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{(n+2)\,u_n}{2(n+1)}\ .$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $u_n \geq 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14. *Irrationalité de e.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n\cdot n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 15.

1. Montrer que : $\forall x \in [3,5],\ 3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. On définit $\varphi : [3,5] \to [3,5],\ x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de φ.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [3,5],\ |\varphi(x) - 4| \ \leq\ \frac{|x-4|}{2}$.
3. On considère la suite $(u_n) \in [3,5]^{\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{u_n}$.
   (a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
   (b) Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Exercice 16. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \in (\mathbb{R}_+^\star)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Exercice 17.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 18. *Somme harmonique*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la suite (u_n).

Exercice 19. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{(n+2)\,u_n}{2(n+1)} .$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n \geq 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 20.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1-u_n), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
5. Montrer que les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1/2[$ sont stables par f et que f est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.*
6. On suppose que $u_0 \in]0, 1/2[$. Montrer que la suite (u_n) est alors croissante *(On pourra s'aider de la question 3.)* En déduire la nature de la suite (u_n). Même question si $u_0 \in]-\infty, 0[$.
7. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]1/2, +\infty[$.

Exercice 21.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
5. Montrer que l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle.
6. On suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de u_0 *(On pourra étudier le signe de $(f \circ f)(x) - x$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$).* Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
7. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
8. On suppose que $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$?
9. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.

Exercice 22.

En suivant la démarche décrite dans les exercices 20 et 21, étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est donnée par :

1. $f(x) = x^2$,	2. $f(x) = x^2 + 1$,	3. $f(x) = \sqrt{1+x}$,
4. $f(x) = 1 + \ln(x)$,	5. $f(x) = e^x - 1$,	6. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

Pour certaines valeurs de u_0, la suite (u_n) peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

Exercice 23.

Montrer que :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}$$

Exercice 24. *Calcul approché de $\sqrt{a}$.*

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.
3. Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.
   Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n} \underset{n\infty}{\to} 0$.

Exercice 25.

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$. Étudier la limite de (x_n).

Exercice 26.

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 27.

Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice 28. *Lemme de Cesàro*[1].

1. Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On définit la suite (v_n) dont le terme général est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}.$$

Montrer que si (u_n) converge vers l alors (v_n) converge également vers l.

2. Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On suppose qu'il existe un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \to l$ avec $l \neq 0$. Montrer qu'alors $l > 0$ et que $u_n \sim \sqrt[\alpha]{nl}$.
3. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 29.
Soit (u_n) une suite réelle minorée. On suppose que (u_n) est sous-additive, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété :

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m, \qquad \forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^2.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers $\inf\left\{\frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 30.
Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si, et seulement si de toute sous-suite de (u_n), on peut extraire une sous-sous-suite qui converge vers l.

1. Ernesto Cesàro. Naples 1859 - Torre Annunziata 1906. Mathématicien italien.