Feuille d'exercices n° 6

Applications

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1. la fonction f s'annule ;
2. la fonction f est toujours nulle ;
3. f n'est pas une fonction constante ;
4. f est croissante ;
5. f est décroissante ;
6. f présente un minimum ;
7. f présente un maximum.

Exercice 2. Donner la négation des assertions de l'exercice précédent.

Exercice 3. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$;
   (b) $A \cap B = A$;
   (c) $A \cup B = B$;
   (d) $A \setminus B = \emptyset$.
3. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \cup B = A \cap C$;
   (b) $B \subset A \subset C$.
4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C\ .$$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ 2. $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ 3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - y, 4x - 2y) \end{cases}$ 4. $k : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 5. Soit :

$$f \;:\; \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \quad \text{et soit} \quad g \;:\; \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

Exercice 7. Soit f une application de E vers F avec $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Exercice 8. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \to I_n$?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de I_p dans I_n ?
3. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 9. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E.

Exercice 10. Indicatrice d'une partie d'un ensemble
Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de parties de E. Soit A une partie de E : $A \in \mathcal{P}(E)$. On note $\overline{A} = E \setminus A$, le complémentaire de A dans E.
Pour tout $A \subset E$ on définie une fonction *indicatrice de A* sur E à valeurs dans $\{0, 1\}$, notée $\mathbf{1}_A$, définie pour $\forall x \in E$ par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \overline{A}. \end{cases}$$

1. On considère deux exemples :
   (a) Soient $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b, c\} \subset E$ et $B = \{c, d\} \subset E$. Expliciter les fonctions $\mathbf{1}_E$, $\mathbf{1}_\emptyset$, $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{\overline{A}}$, $\mathbf{1}_B$ ainsi que $\mathbf{1}_{A \cap B}$ et $\mathbf{1}_{A \cup B}$.
   (b) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$ sa fonction indicatrice sur $\mathbb{R}$. Décrire les ensembles $\mathbf{1}_A(A)$, $\mathbf{1}_A(\overline{A})$, $\mathbf{1}_A(\mathbb{R})$, $\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\})$, $\mathbf{1}_A^{-1}(\{0\})$, $\mathbf{1}_A^{-1}(\{0; 1\})$.
2. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer les propriétés de la fonction indicatrice :
   (a) Inclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$. (Cela veut dire que pour $\forall x \in E$, on a $\mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x)$.)
   Égalité : $A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.
   (b) Opérations ensemblistes :

   $$\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A; \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B; \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$

(c) Lien avec le cardinal : si A est une partie finie de E alors $|A| = \sum_{x\in E} \mathbf{1}_A(x)$.

3. Formule du crible. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

4. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.
   (a) Quel est le cardinal de $\mathcal{F}$?
   (b) Soit

   $$\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F} : \ A \mapsto \mathbf{1}_A$$

   une application qui à chaque partie A de E associe sa fonction indicatrice. Montrer que ϕ est une application injective. En déduire que ϕ est bijective.
   (c) En déduire que $\mathcal{P}(E)$ est fini et calculer son cardinal.
5. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Calculer $\displaystyle\sum_{A,B\subset E} |A \cap B|$, $\displaystyle\sum_{A,B\subset E} |A \cup B|$.

Exercice 11. Deux autres preuves
Soit E un ensemble, avec $\mathrm{Card}(E) = n$. Démontrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$,
– en utilisant les coefficients $\binom{n}{k}$;
– en raisonnant par récurrence sur n.

Exercice 12. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$

Exercice 13. Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E. Montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 14. Soient E,F deux ensembles non vides. Soient A une partie de E, B une partie de F et f une application de E dans F. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si A est une partie finie de E, alors $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F, alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F, alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E, alors B est une partie finie de F.

Exercice 15. Soient E un ensemble fini non vide, F un ensemble quelconque, et f une application de E dans F.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F)$.

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et E un ensemble à n éléments. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $x \in f(x)$ et que pour tous $x, y \in E$, on a l'implication $x \in f(y) \Rightarrow y \in f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\operatorname{Card} f(x) \geq 1$.
2. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $\operatorname{Card} f(a) = n$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\operatorname{Card} f(x) \geq 2$.
3. Montrer qu'il existe des éléments $x, y \in E$ différents tels que les ensembles $f(x)$ et $f(y)$ aient le même nombre d'éléments.

Exercice 17. Soit E un ensemble avec $\operatorname{Card}(E) = n$.

1. Calculer le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \subset B\}$.
   Indication : pour chaque B compter les parties $A \subset B$.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B$ équivaut à $A^C \cup B = E$.
3. En déduire le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E\}$.

Exercice 18. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;
5. $f : \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3| \,\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$;
6. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

Exercice 19. Décrire les ensembles qui suivent.

(a) $\tan(\{0\})$;$\sin^{-1}(\{2\})$;$\cos^{-1}([0, 1])$;

(b) $\left(\cos_{|\,[3,7]}\right)^{-1}([0, 1])$;$\left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1}([0, 1])$;$\sqrt{\cdot}\,([0, 1])$;

(c) $f^{-1}([0, 1])$ pour $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;$f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;

(d) $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;$f^{-1}([-1, 1[\cup \{2\})$ et $f([0, 1]^3)$

pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$;

(e) $|\cdot|([-2, -1] \cup [2, 4[)$;$\left(|\cdot|_{|\,[-8,7]}\right)^{-1}([2, 3])$;$|\cdot|^{-1}(\{1\})$;

(f) $\exp(]-\infty, 2])$;$\exp^{-1}([-1, e])$;$\ln(\mathbb{R}_-)$;

(g) $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.

Exercice 20. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) .$$
2. Pour l'inclusion de la question précédente, donner un contre-exemple à l'inclusion réciproque.
3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) .$$

Exercice 21. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$;$[\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$;

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$;

(iii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

(iv) $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 7, 9, 11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;

(v) $\{0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 1\}$, $x \mapsto -(x - 1)$;$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.

Exercice 22. On considère l'application $f : I \to J, x \mapsto x^2$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Trouver I et J tels que :

1. f est injective mais pas surjective ;
2. f est surjective mais pas injective ;
3. f est bijective.

Exercice 23. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 24. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$.

Exercice 25. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que, pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
2. En déduire que si f est surjective alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Montrer que, pour tout $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que si f est injective alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.