Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2017-2018
Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 5
CALCULS ALGEBRIQUES

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1 - x$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{1-x}{3x+2}$.

Exercice 2.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $x^6 - 6x^3 + 10 \neq 0$.
2. Montrer que, pour tout réel x,

$$\frac{-x^6 + 6x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^6 - 6x^3 + 10} \geq -1 + \frac{6}{x^6 - 6x^3 + 10} .$$

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
2. Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. En déduire la limite de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $(x - y) \times \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$. En déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i$.
2. Soit a et b deux nombres réels.
   (a) On suppose a et b strictement positifs et qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = b^n$.
   Que peut-on dire de a et b ?
   (b) On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
   (c) On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ impair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
3. Soit $L \in \mathbb{R}_+$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|a| \leq L$ et $|b| \leq L$. Montrer que $|a^3 - b^3| \leq 3L^2|a - b|$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$. Montrer que $|a^4 - b^4| \geq 4|a - b|$.

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $(f_0, \cdots, f_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(g_0, \cdots, g_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \, (g_{i+1} - g_i) \;=\; - \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_{i-1}) \, g_i \;+\; (f_n \, g_{n+1} - f_0 \, g_0) \ .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$.
   (a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{2} \;\geq\; 0 \ .$$

   (b) À quelle condition la somme précédente est-elle nulle ?

Exercice 6.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
2. Résoudre en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'équation $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer à quelles conditions $9x^2 - 42xy + 24y^2 \leq 0$.

Exercice 7. Dans cet exercice, on acceptera comme démonstration même des esquisses d'arguments combinatoires.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [\![0, n]\!]$ et E un ensemble à n éléments.
   (a) On rappelle qu'un *arrangement* de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E. Calculer A_n^p, le nombre d'arrangements de p éléments de E.
   (b) Une *permutation* de E est un arrangement de n éléments de E. Déduire A_n^n, le nombre de permutations de E, de la question précédente.
   (c) Vérifier l'égalité $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et en donner une interprétation combinatoire. On notera que l'on retrouve bien $\mathrm{A}_n^0 = 1$.
   (d) On note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments de E. Démontrer que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \, (n-p)!}$$

   puis calculer $\binom{n}{0}$ et $\binom{0}{0}$.
2. (a) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
   (b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k} \ .$$

   (b) Donner une interprétation combinatoire de l'égalité précédente.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Calculer le nombre de parties de E.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 8.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \varepsilon .$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\left|(1+e^{-n}) - 1\right| \leq \varepsilon .$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\left|(1+e^{-n})\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \varepsilon .$$

4. Pour tout $R \in \mathbb{R}$, donner explicitement $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\frac{n}{2} \geq R .$$

Exercice 9.

1. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 .$$

3. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$. 2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 11.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$.
2. Montrer que pour toute fonction $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $j(n) \geq n$.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle déterminée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.
4. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ pour tout $n \geq 0$. Donner une expression de v_n en fonction de n.

Exercice 12. Soient $k, n \in \mathbb{N}, k \leq m$.

1. Combien y a-t-il de listes strictement croissantes de k entiers parmi $1, 2, \cdots, n$?
2. En dénombrant les listes strictement croissantes de $k+1$ entiers parmi $1, 2, \cdots, n+1$ dont le dernier terme vaut successivement $k+1, k+2, \cdots, n+1$, montrer que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Exercice 13. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Exercice 14. Soient p, q, r des entiers naturels avec $r \leq p+q$. Montrer que :

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i} \binom{q}{r-i}.$$

Exercice 15. Soient p et n des entiers naturels avec $0 \leq p \leq n$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Écrire cette égalité pour $p = 2$, pour $p = 3$.
3. En déduire :

$$\begin{array}{lll} S_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n & ; & S_3 = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)^2 \cdot n; \\ S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 & ; & S_4 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3. \end{array}$$

Exercice 16. On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Calculer

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{1}{i+j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!\,.$$

Indication : permuter les Σ.