Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2017-2018

Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 4

FONCTION HYPERBOLIQUES

Rappel : L'assertion

$$\Big(\forall x \in I, \quad g'(x) = 0\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\exists c \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in I, \quad g(x) = c\Big),$$

n'est vraie **que si I est un intervalle** !

Exercice 1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème, calculer f' et en déduire les variations de f.
4. Calculer
$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) \text{ et } \lim_{x \to 1^+} f'(x) .$$
Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x = -1$ et $x = 1$?
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).
2. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) .$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation et tracer sommairement le graphe de f.
5. Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1-2x^2)\,.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
2. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1-2\cos^4(x))\,.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π-périodique. Quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I.
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ? Préciser la valeur des limites de f' à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer son graphe sur trois périodes.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{3+4\mathrm{sh}\,(u)}{\mathrm{ch}\,(u)}\,.$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Étudier les variations de f. On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x) + 1}{\mathrm{ch}\,(x) - 1}\,.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Calculer $f'(x)$ aux points x où f est dérivable.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 9.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x :

$$16x^6 + 24x^4 + 9x^2 + 1 = (x^2+1)P(x).$$

   et expliciter ce polynôme.
2. Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \operatorname{argsh}(3x + 4x^3).$$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.

   (b) Calculer $f'(x)$ aux points x où f est dérivable. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 10. Donner une expression plus simple de :

$$f(x) = \operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}}\right), \qquad g(x) = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}), \qquad h(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(u) = 3\operatorname{ch}(u) - 4$ et soit g la fonction définie par $g(u) = \arcsin\big(3\operatorname{ch}(u) - 4\big)$.

1. Montrer que pour tout réel u :

$$u \in [-\ln 3, \ln 3] \iff f(u) \in [-1, 1].$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de g, et préciser l'ensemble des points où g est continue.
3. En précisant son domaine de validité, montrer la formule :

$$g'(u) = \frac{3\operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))}}.$$

4. Déterminer les limites de cette expression au bord de son domaine de validité. (*Suggestion : pour l'un des calculs de cette question, on remarquera que* $\operatorname{sh}^2(u) = \operatorname{ch}^2(u) - 1$).
5. Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6. Dresser le tableau des variations de g puis tracer sommairement son graphe.