Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2017-2018

Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 1

RÉVISIONS

ORDRE ET INEGALITÉS

Exercice 1. Ordonner les nombres qui suivent : 2 ; 1 ; $\frac{13}{15}$; $\frac{7}{8}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Exercice 2. Pour chacune des propositions, déterminer si elle est vraie ou fausse.

1. Pour tout couple $(x,y)\in[0,1]\times[0,2]$, on a : $-10\le x^2-xy-2y^2\le 1$.
2. Pour tout couple $(x,y)\in[-2,-1]\times[2,4]$, on a : $xy\ge -4$.
3. Pour tout couple $(x,y)\in[-2,7]\times[-4,1]$, on a : $-28\le xy\le 8$.
4. Pour tout couple $(x,y)\in([-3,-2]\cup[3,4])\times([-4,-1]\cup[1,2])$, on a : $-12\le xy\le 8$.

Exercice 3.

1. Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbf{R}$ qui vérifient $x=\sqrt{x^4}$.
2. Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbf{R}$ qui vérifient $x\le x^2$.
3. Déterminer l'ensemble des $x\in[-1,\infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x}=1-x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2}<\dfrac{1-x}{3x+2}$.

MANIPULATIONS ALGÉBRIQUES

Exercice 4. Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on considère $P(x)=x^3+x^2+18$.

1. Déterminer des réels a,b,c tels que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$.
2. Montrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $ax^2+bx+c\ge 5$.
3. En déduire que, pour tout $x\ge-\frac{1}{3}$, on a $P(x)>13$.

Exercice 5.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $x^6-6x^3+10\neq 0$.
2. Montrer que, pour tout réel x,

$$\frac{-x^6+6x^3+3x^2+6x-1}{x^6-6x^3+10}\ \ge\ -1+\frac{6}{x^6-6x^3+10}\ .$$

Exercice 6.

1. Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
2. Résoudre en $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ l'équation $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$.
3. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer à quelles conditions $9x^2 - 42xy + 24y^2 \leq 0$.

Indication : écrire les expressions précédentes comme des sommes ou différences de carrés.

Exercice 7.

1. Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $(4,7)$ et de rayon 3.
2. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{C}_2 \;=\; \left\{\, (x,y) \;\middle|\; x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \,\right\}$$
est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3. Écrire une équation de la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $(4,7,1)$ et de rayon 3.
4. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{S}_2 \;=\; \left\{\, (x,y,z) \;\middle|\; x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0 \,\right\}$$
est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

RECHERCHE D'EXTREMA

Exercice 8. Déterminer les extrema des ensembles qui suivent :

$A = \{\, |xy| \mid x \in [-1,1] \text{ et } y \in [2,3] \,\}$; $\quad B = \{\, |x+3y| \mid x \in [0,1] \cup [5,6] \text{ et } y \in [-3,-2] \,\}$;

$C = \{\, xy \mid x \in [-1,1] \text{ et } y \in [3,4] \,\}$; $\quad D = \left\{\, -y(x^2+1) \,\middle|\, x \in [-1,0] \text{ et } y \in [-2,-1] \cup [3,4] \,\right\}$;

$E = \left\{ \dfrac{x^2+1}{y^2+3} \,\middle|\, x \in [-1,2] \text{ et } y \in [2,3] \right\}$; $\quad F = \left\{ \dfrac{x^3+1}{y^4+1} \,\middle|\, x \in [-2,2] \text{ et } y \in [-1,3] \right\}$.

SUITES

Exercice 9.

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 1 \end{array} \right.$$
   (a) Quelle est la nature de cette suite ?
   (b) Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1/2 \end{array} \right.$$
   (a) Quelle est la nature de cette suite ?
   (b) Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. On considère la suite arithmétique vérifiant $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

1. Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.
2. En déduire son terme général.

Exercice 11. Montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est constante.

Exercice 12.

1. Montrer que pour tout réel $q \neq 1$ on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

   Indication : On pourra poser $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ et simplifier $S_n - qS_n$.

2. En déduire que la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ est donnée par :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right).$$

Exercice 13. Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n) = \left(\dfrac{n}{n^2 + 1} \right)$
2. $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{1}{n} \right) \left(n - \dfrac{1}{n} \right) - n^2 \right)$
3. $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{2}{n^2} \right)^3 - n^3 \right)$
4. $(u_n) = \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$
5. $(u_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n + 1} \right)$
6. $(u_n) = \left(\frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 1} \right)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}}$.

ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 14.

PARTIE A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer g' et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de g.

PARTIE B Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer f'. Dresser le tableau de variations de f.
   Indication : On pourra s'aider de la partie A
3. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha\,(1 + 2\exp(-\alpha))$.
4. Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer T puis $(\mathcal{C})$ (on admettra que $0.35 < \alpha < 0.36$ et que $0.85 < f(\alpha) < 0.86$).

Exercice 15. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x - \dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

BIJECTIVITÉ ET COMPOSITION

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 17. Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[, x \mapsto x^2 - 1$. Cette fonction est-elle bijective ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x/(x^2+1)$.

1. f est-elle injective ? surjective ? *Indication : pour l'injectivité, on pourra montrer que pour tous réels u, v, on a $f(u) = f(v) \Leftrightarrow 2(v-u)(uv-1) = 0$. Pour la surjectivité, on pourra s'intéresser à l'équation $f(x) = 2$.*
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1], x \mapsto f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.