Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2017-2018

Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 10

ANALYSE RÉELLE, CONTINUITÉ

Exercice 1. Étudier l'existence d'une limite en $+\infty$ pour $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \sin(x)$.

Exercice 2. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On suppose

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \exists x_n \in \mathbf{R},\ \left(|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ \text{ et } \ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \right).$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $x_0 \in]a,b[$ et $f :]a,b[\to \mathbf{R}$.
On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans $]a,b[$ et contenant x_0 tel que $\forall x \in I,\ f(x) > 0$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x^a \ \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a, f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) \ : \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)\, f(y).$$

Soit f vérifiant $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
   On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.

Exercice 6. Soient un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, n fois dérivable, et telle que $f^{(n)}$ est continue. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts.

1. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois.

Exercice 7. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

Exercice 8. A l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \to \infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$