Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 1
CCP DS3 22 novembre 2017

On pourra admettre le résultat suivant (inégalité des accroissements finis) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f: I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.
Soient x et y deux éléments de I, avec $x < y$.
Alors il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$.
Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{8} - x^3\right)$.
Soit a un réel. On définit une suite u par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 1.

a. Si la suite u est convergente dans $\mathbb{R}$, quelle est sa limite possible ?
b. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$: $x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \geq x$ et $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq x$.

Exercice 2. Dans les exercices 2, 3 et 4, on suppose que $0 < \lambda \leq \frac{4}{7}$, et $0 \leq a < 1$.

a. Montrer que $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x)$.
   On remarquera que pour $x \in [0,1]$, $\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{4} < 1$
b. Préciser la monotonie de u selon les valeurs de a.

Exercice 3. On pourra appliquer le théorème des accroissements finis et vérifier que f' est décroissante.

a. Montrer que si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors on a $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
b. En déduire que si $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^n$.

Exercice 4. On pourra appliquer le théorème des accroissements finis.

a. Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors on a : $0 \leq \frac{1}{2} - f(x) \leq \left(\frac{1}{2} - x\right) f'(x)$.
b. Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors f est croissante, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\lambda}{8} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
c. En déduire que si $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2} - u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1}$.

Exercice 5. Dans cette question, on suppose que $\frac{4}{7} < \lambda \leq \frac{8}{7}$, et toujours $0 \leq a \leq 1$.

a. Effectuer une étude soignée des variations de l'application f sur $[0,1]$.
   On précisera notamment les réels β, γ tels que $\frac{1}{2} < \beta < \gamma$, $f'(\beta) = 0$ et $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.
   Et montrer que $f(\beta) < 1$, $f(0) > 0$ et $f(1) \geq 0$
b. Montrer que tous les termes u_n de la suite u sont dans $[0,1]$.
c. Etudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$, c'est-à-dire ($0 \leq a < \frac{1}{2}$; $a = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < a < \gamma$; $a = \gamma$ et $\gamma < a \leq 1$),. On précisera en particulier si la suite est monotone, éventuellement à partir d'un certain rang.