Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 1
CCP DS3 22 novembre 2017

On pourra admettre le résultat suivant (inégalité des accroissements finis) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f: I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.
Soient x et y deux éléments de I, avec $x < y$.
Alors il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$.
Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{8} - x^3\right)$.
Soit a un réel. On définit une suite u par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Exercice 1.

a. Si la suite u est convergente dans $\mathbb{R}$, quelle est sa limite possible ?
b. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$: $x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \geq x$ et $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq x$.

Correction exercice 1

a. Si la suite est convergente vers un réel l, alors, on obtient $f(l) = l$, par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (en effet f est définie et continue sur $\mathbb{R}$).

$$f(l) = l \Leftrightarrow l = l + \lambda\left(\frac{1}{8} - l^3\right) \Leftrightarrow l^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$$

Car $\lambda \neq 0$.

b.

$$f(x) - x = \lambda\left(\frac{1}{8} - x^3\right) = \lambda\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - x^3\right) = \lambda\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + x^2\right)$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + x^2$ a un discriminant $\Delta = \frac{1}{4} - 1 < 0$ donc $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + x^2 > 0$, comme $\lambda > 0$, $f(x) - x$ a le même signe que $\frac{1}{2} - x$.

Donc pour tout x dans $\mathbb{R}$: $x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \geq x$ et $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq x$.

Exercice 2. Dans les questions 2, 3 et 4, on suppose que $0 < \lambda \leq \frac{4}{7}$, et $0 \leq a < 1$.

a. Montrer que $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x)$.
On remarquera que pour $x \in [0,1]$, $\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{4} < 1$
b. Préciser la monotonie de u selon les valeurs de a.

Correction exercice 2

a.

$$\frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} - x - \lambda\left(\frac{1}{8} - x^3\right) = \frac{1}{2} - x - \lambda\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + x^2\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(1 - \left(\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{4}\right)\right)$$

$$\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{4} \leq \lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{7}{4}\lambda \leq \frac{7}{4} \times \frac{4}{7} = 1$$

Donc $\frac{1}{2} - f(x)$ a le même signe que $\frac{1}{2} - x$ alors $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x)$

b. On utilise les résultats obtenus dans les deux questions précédentes.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ \ (1)$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on montre par récurrence que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

Pour $n = 0$ $u_0 = a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ et donc grâce à (1) que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq \frac{1}{2}$

La suite u est donc croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, et que $\frac{1}{2}$ est la seule limite possible

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq x \leq 1$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on montre comme précédemment par une récurrence que si $u_0 = a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n \leq 1$

La suite u est donc décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, et que $\frac{1}{2}$ est la seule limite possible

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 3. On pourra appliquer le théorème des accroissements finis et vérifier que f' est décroissante.

a. Montrer que si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors on a $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

b. En déduire que si $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^n$.

Correction exercice 3

$f''(x) = -6\lambda x \leq 0$ donc f' est décroissante.

a. Le résultat est évident si $x = \frac{1}{2}$. On suppose donc que $\frac{1}{2} < x \leq 1$ et on utilise l'égalité des accroissements finis sur $\left]x, \frac{1}{2}\right[$ pour la fonction f qui est dérivable, il existe $c \in \left]\frac{1}{2}, x\right[$ tel que :

$$f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(c)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Car $c > \frac{1}{2}$ entraine que $f'(c) < f'\left(\frac{1}{2}\right)$ puisque f' est décroissante. On en déduit que :

$$0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

b. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$

$$0 \leq u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \left(u_n - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(u_n - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)$$

Par conséquent par récurrence

$$0 \leq u_0 - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^0$$

Car $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Est vrai pour $n = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \left(u_n - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^n \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^{n+1}$$

Exercice 4. On pourra appliquer le théorème des accroissements finis.

a. Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors on a : $0 \leq \frac{1}{2} - f(x) \leq \left(\frac{1}{2} - x\right) f'(x)$.

b. Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors f est croissante, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\lambda}{8} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

c. En déduire que si $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2} - u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1}$.

Correction exercice 4

a. Le résultat est évident si $x = \frac{1}{2}$. On suppose donc que $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et on utilise l'égalité des accroissements finis sur $\left]x, \frac{1}{2}\right[$ pour la fonction f qui est dérivable, il existe $c \in \left]x, \frac{1}{2}\right[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) = f'(c)\left(\frac{1}{2} - x\right) \leq f'(x)\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

Car $c > x$ entraine que $f'(c) < f'(x)$ puisque f' est décroissante. On en déduit comme dans le 3.a. que :

$$0 \leq \frac{1}{2} - f(x) \leq f'(x)\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

b. $f'(x) = 1 - 3\lambda x^2$ donc pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$f'(x) \geq 1 - 3\lambda \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\lambda \geq 1 - \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} > 0$$

Ce qui montre que f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Comme $0 \leq u_n \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, puis que $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ ce qui équivaut à $\frac{\lambda}{8} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\lambda}{8} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

c. Donc d'après a.

$$0 \leq \frac{1}{2} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2} - u_n\right) f'(u_n) \leq \left(\frac{1}{2} - u_n\right) f'\left(\frac{\lambda}{8}\right)$$

Et

$$f'\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 1 - 3\lambda\left(\frac{\lambda}{8}\right)^2 = 1 - \frac{3}{64}\lambda^3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2} - u_n\right)\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)$$

Par conséquent par récurrence

$$0 \leq \frac{1}{2} - u_1 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{1-1} = \frac{1}{2}$$

Car $u_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2} - u_n\right)\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n}$$

Ce qui achève la récurrence donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2} - u_n \leq \left(\frac{1}{2} - u_1\right)\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1}$$

Exercice 5. Dans cette question, on suppose que $\frac{4}{7} < \lambda \leq \frac{8}{7}$, et toujours $0 \leq a \leq 1$.

a. Effectuer une étude soignée des variations de l'application f sur $[0,1]$.
On précisera notamment les réels β, γ tels que $\frac{1}{2} < \beta < \gamma$, $f'(\beta) = 0$ et $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.

Et montrer que $f(\beta) < 1$, $f(0) > 0$ et $f(1) \geq 0$

b. Montrer que tous les termes u_n de la suite u sont dans $[0,1]$.

c. Etudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$, c'est-à-dire ($0 \leq a < \frac{1}{2}$; $a = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < a < \gamma$; $a = \gamma$ et $\gamma < a \leq 1$),. On précisera en particulier si la suite est monotone, éventuellement à partir d'un certain rang.

Correction exercice 5

a. On rappelle que $f'(x) = 1 - 3\lambda x^2$, pour $x \in [0,1]$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} = \beta$ avec

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0, \beta[\quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\beta, 1]$$

On a $f'(0) = 1$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4}\lambda > 1 - \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 0$ et $f'(1) = 1 - 3\lambda < 0$

Comme la dérivée f' est strictement décroissante on a :

$$\frac{1}{2} < \beta < 1$$

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires pour f' qui est bien continue.

Comme f est croissante sur $[0, \beta[$ et $[0, \beta[$ et f est décroissante sur $]\beta, 1]$, le maximum de f est en $f(\beta)$.

Puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, on a $f(\beta) > \frac{1}{2}$

D'autre part

$$f(1) = 1 - \frac{7}{8}\lambda < 1 - \frac{7}{8} \times \frac{4}{7} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc il existe un réel $\gamma \in]\beta, 1[$ tel que $f(\gamma) = \frac{1}{2}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires (f est bien continue).

On trouve γ en résolvant $f(x) = \frac{1}{2}$ d'où les équivalence suivante

$$f(x) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(1 - \left(\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{4}\right)\right) = 0$$

D'après 2.a. puis comme $\gamma > \frac{1}{2}$, γ vérifie

$$\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda x^2 + 2\lambda x + \lambda - 4 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4 \times 4\lambda(\lambda - 4) = 4(\lambda^2 - 4\lambda^2 + 16\lambda) = 4(16\lambda - 3\lambda^2) = 4\lambda(16 - 3\lambda)$$
$$> 4\lambda\left(16 - 3 \times \frac{8}{7}\right) = 4\lambda\frac{16 \times 7 - 24}{7} > 0$$

Il y a donc deux solutions

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{\lambda}{2} - \sqrt{4(16\lambda - 3\lambda^2)}}{2\lambda} = \frac{-\frac{\lambda}{2} - 2\sqrt{16\lambda - 3\lambda^2}}{2\lambda} < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{4(16\lambda - 3\lambda^2)}}{2\lambda} = \frac{-\frac{\lambda}{2} + 2\sqrt{16\lambda - 3\lambda^2}}{2\lambda} = \frac{-\lambda + 4\sqrt{16\lambda - 3\lambda^2}}{4\lambda} > 0$$

On remarque également que $f(1) = 1 - \frac{7}{8}\lambda \geq 0$ car $\lambda \leq \frac{8}{7}$

Enfin, on a toujours $f(x) - x \geq 0$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, et $f(x) - x \leq 0$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Cela résulte des calculs effectués dans l'exercice 1.b.

x	0		$\frac{1}{2}$		β		γ		1
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{\lambda}{8} > 0$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$f(\beta) < 1$	↘	$\frac{1}{2}$	↘	$1 - \frac{7}{8}\lambda > 0$
$f(x) - x$		$+$	0		$-$				

b. On sait que $u_0 = a$ est un élément de $[0,1]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$
   Pour tout $x \in [0, \beta]$ on a $0 \leq f(0) \leq f(x) \leq f(\beta) \leq 1$
   Pour tout $x \in [\beta, 1]$ on a $0 \leq f(1) \leq f(x) \leq f(\beta) \leq 1$
   Donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \in [0,1]$
   On peut faire une récurrence, $u_0 \in [0,1]$ et on montre que si $u_n \in [0,1]$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ ce qui achève la récurrence.

c. La discussion suivante se déduit des variations de f et de l'étude du signe de $f(x) - x$

   i. $0 \leq a < \frac{1}{2}$

   Si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ alors $0 \leq x \leq f(x) < \frac{1}{2}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq u_n < u_{n+1} < \frac{1}{2}$$

   La suite u est croissante et majorée donc elle converge vers la seule limite possible $\frac{1}{2}$.

   ii. $a = \frac{1}{2}$ la suite est constante, elle est donc convergente.

   iii. $\frac{1}{2} < a < \gamma$

   Si $\frac{1}{2} < x < \gamma$ alors $\frac{1}{2} < f(x) < x < \gamma$, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} < u_n < \gamma$$

   La suite u est décroissante et minorée, elle converge vers la seule limite possible $\frac{1}{2}$.

   iv. $a = \gamma$, $u_1 = f(\gamma) = \frac{1}{2}$ la suite est stationnaire donc elle converge vers $\frac{1}{2}$.

   v. $\gamma < a \leq 1$

   $0 \leq u_1 = f(a) < \frac{1}{2}$. On est ramené au premier cas. La suite converge vers $\frac{1}{2}$.