Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 1
CCP DS1 25 octobre 2017

Préliminaire

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0,2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$C(a,\varphi,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+k\varphi) \qquad \text{et} \qquad S(a,\varphi,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+k\varphi)$$

Etablir les formules :

$$C(a,\varphi,n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad S(a,\varphi,n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\sin\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On pourra pour cela évaluer $C(a,\varphi,n) + i\,S(a,\varphi,n)$.

Correction préliminaire

3 points

$$C(a,\varphi,n) + iS(a,\varphi,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+k\varphi) + i\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+k\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(a+k\varphi) + i\sin(a+k\varphi))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+k\varphi)} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ia}e^{ik\varphi} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\varphi}\right)^k$$

1 point

$$e^{i\varphi} = 1 \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z}, \varphi = 2l\pi$$

Ce n'est possible, donc $e^{i\varphi} \neq 1$.

4 points

$$C(a,\varphi,n) + iS(a,\varphi,n) = e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\varphi}\right)^k = e^{ia}\frac{1-e^{ni\varphi}}{1-e^{i\varphi}} = e^{ia}\frac{e^{ni\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-ni\frac{\varphi}{2}} - e^{ni\frac{\varphi}{2}}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)}$$

$$= e^{ia}e^{(n-1)i\frac{\varphi}{2}}\frac{\left(e^{-ni\frac{\varphi}{2}} - e^{ni\frac{\varphi}{2}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)} = e^{i\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}\frac{-2i\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}e^{i\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\left(\cos\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cos\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right) + i\frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\sin\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)$$

D'où l'on déduit que :

$$C(a,\varphi,n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad S(a,\varphi,n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\sin\left(a+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Partie I

On pose $\alpha = \frac{\pi}{5}$

1. Montrer que $\cos(\alpha) + \cos(3\alpha) = \frac{1}{2}$ à l'aide du préliminaire et de l'annexe 1.
2. En linéarisant $\cos(\alpha)\cos(3\alpha)$, montrer que $\cos(\alpha)\cos(3\alpha) = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha) + \cos(3\alpha))$.
   On exprimera $\cos(2\alpha)$ et $\cos(4\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\cos(3\alpha)$
3. En déduire la valeur de $\cos(\alpha)$ à l'aide de l'annexe 2.

Correction partie I

1. 4 points

$$\cos(\alpha) + \cos(3\alpha) = C(\alpha, 2\alpha, 2) = \frac{\sin\left(\frac{2\times 2\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + (2-1)\frac{2\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)}{\sin(\alpha)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(4\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Comme $\sin(4\alpha) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin(\alpha)$

$$\cos(\alpha) + \cos(3\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{2}$$

2. 3 points

$$\cos(\alpha)\cos(3\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(4\alpha) + \cos(2\alpha))$$

Comme

$$\cos(4\alpha) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos(3\alpha)$$

On a

$$\cos(\alpha)\cos(3\alpha) = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha) + \cos(3\alpha)) = -\frac{1}{4}$$

3. 2 points. On connait la somme et le produit de $\cos(\alpha)$ et $\cos(3\alpha)$, donc ces deux valeurs sont les solutions de :

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Et les solutions sont :

$$\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$$

Puis on remarque que $\cos(\alpha) > 0$, puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et que $\cos(3\alpha) < 0$, puisque $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi$. On en déduit que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Partie II

1. Dans cette question, et les suivantes, θ désigne le réel $\frac{\pi}{17}$.

   On pose :

$$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$
$$x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$

   a. Montrer que $x_1 > 0$.
   b. Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ en s'aidant du préliminaire.
   c. Calculer le produit x_1x_2. On devra pour cela :
      i. Développer le produit des deux sommes x_1 et x_2.
      ii. Appliquer au résultat obtenu la formule linéarisant le produit $\cos(a)\cos(b)$.
      iii. En conclure que $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2)$.
   d. Déduire de ce qui précède des expressions de x_1 et x_2 à l'aide de racines carrées.
2. On pose ici :

$$y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$$
$$y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$
$$y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta)$$
$$y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$$

   a. Calculer, en s'inspirant de la question précédente les produits y_1y_2 et y_3y_4.
   b. En déduire les expressions de y_1, y_2, y_3 et y_4 à l'aide de racines carrées.
3. Calculer $\cos(\theta)\cos(13\theta)$. Et expliquer comment on pourrait trouver $\cos(\theta)$, c'est trop long à faire le calcul entier en temps limité.

Correction partie II

1. 3 points. $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$

   a. $0 < \frac{5\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \frac{7\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$

   Donc $\cos(5\theta) > 0$ et $\cos(7\theta) > 0$, d'après Annexe 3.

$$\cos(11\theta) = -\cos(6\theta) > -\cos(3\theta)$$

   Car cos est décroissant sur $[0, \pi]$

   Ce qui montre que $\cos(3\theta) + \cos(11\theta) > 0$

   Finalement $x_1 > 0$.

   b. 4 points.

$$x_1 + x_2 = \cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(9\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$
$$= \sum_{k=0}^{7} \cos(\theta + k2\theta)$$

   D'après la question précédente, pour $n = 8$, $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta = \frac{2\pi}{17}$, donc $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{17}\right) \neq 0$

$$x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^{7} \cos(\theta + k2\theta) = \frac{\sin(8\theta)\cos(\theta + (8-1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(16\theta)}{2\sin(\theta)}$$
$$= \frac{\sin(17\theta - \theta)}{2\sin(\theta)} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{2\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{2\sin(\theta)} = \frac{1}{2}$$

   $\sin(8\theta)\cos(8\theta) = \frac{1}{2}\sin(16\theta)$ d'après annexe 1.

   c.

i. 1 point

$$x_1x_2 = (\cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)+\cos(11\theta))(\cos(\theta)+\cos(9\theta)+\cos(13\theta)+\cos(15\theta))$$
$$= \cos(3\theta)\cos(\theta)+\cos(3\theta)\cos(9\theta)+\cos(3\theta)\cos(13\theta)+\cos(3\theta)\cos(15\theta)$$
$$+\cos(5\theta)\cos(\theta)+\cos(5\theta)\cos(9\theta)+\cos(5\theta)\cos(13\theta)+\cos(5\theta)\cos(15\theta)$$
$$+\cos(7\theta)\cos(\theta)+\cos(7\theta)\cos(9\theta)+\cos(7\theta)\cos(13\theta)+\cos(7\theta)\cos(15\theta)$$
$$+\cos(11\theta)\cos(\theta)+\cos(11\theta)\cos(9\theta)+\cos(11\theta)\cos(13\theta)+\cos(11\theta)\cos(15\theta)$$

ii. 3 points

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ d'après annexe 1.

$$x_1x_2 = \frac{1}{2}(\cos(4\theta)+\cos(2\theta)+\cos(12\theta)+\cos(6\theta)+\cos(16\theta)+\cos(10\theta)+\cos(18\theta)+\cos(12\theta)$$
$$+\cos(6\theta)+\cos(4\theta)+\cos(14\theta)+\cos(4\theta)+\cos(18\theta)+\cos(8\theta)+\cos(20\theta)+\cos(10\theta)$$
$$+\cos(8\theta)+\cos(6\theta)+\cos(18\theta)+\cos(2\theta)+\cos(20\theta)+\cos(6\theta)+\cos(22\theta)+\cos(8\theta)$$
$$+\cos(12\theta)+\cos(10\theta)+\cos(20\theta)+\cos(2\theta)+\cos(24\theta)+\cos(2\theta)+\cos(26\theta)$$
$$+\cos(4\theta))$$
$$=\frac{1}{2}(4\cos(2\theta)+4\cos(4\theta)+4\cos(6\theta)+3\cos(8\theta)+3\cos(10\theta)+3\cos(12\theta)+\cos(14\theta)$$
$$+\cos(16\theta)+3\cos(18\theta)+3\cos(20\theta)+\cos(22\theta)+\cos(24\theta)+\cos(26\theta))$$

iii. 3 points. Puis d'après annexe 3.

$$x_1x_2 = -\frac{1}{2}(4\cos(15\theta)+4\cos(13\theta)+4\cos(11\theta)+3\cos(9\theta)+3\cos(7\theta)+3\cos(5\theta)+\cos(3\theta)$$
$$+\cos(\theta)+3\cos(\theta)+3\cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)+\cos(9\theta)) =$$
$$= -\frac{1}{2}(4\cos(15\theta)+4\cos(13\theta)+4\cos(11\theta)+4\cos(9\theta)+4\cos(7\theta)+4\cos(5\theta)$$
$$+4\cos(\theta)+4\cos(3\theta)) = -2(x_1+x_2)$$

d. 2 points. On a

$$\begin{cases} x_1+x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1x_2 = -2(x_1+x_2) = -1 \end{cases}$$

D'après annexe 2. La somme des racines est $\frac{1}{2}$ et le produit vaut -1, donc $x_1$et x_2 sont les racines de l'équation :

$$X^2 - \frac{1}{2}X - 1 = 0$$

Dont le discriminant vaut

$$\Delta = \frac{1}{4}+4 = \frac{17}{4}$$

Les deux racines sont donc

$$\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$$

Comme $x_1 > 0$ $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$.

2.

a. 3 points+3 points

$$y_1y_2 = (\cos(3\theta)+\cos(5\theta))(\cos(7\theta)+\cos(11\theta))$$
$$=\cos(3\theta)\cos(7\theta)+\cos(3\theta)\cos(11\theta)+\cos(5\theta)\cos(7\theta)+\cos(5\theta)\cos(11\theta)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos(10\theta)+\cos(4\theta)+\cos(14\theta)+\cos(8\theta)+\cos(12\theta)+\cos(2\theta)+\cos(16\theta)$$
$$+\cos(6\theta))$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos(7\theta)+\cos(13\theta)+\cos(3\theta)+\cos(9\theta)+\cos(5\theta)+\cos(15\theta)+\cos(\theta)$$
$$+\cos(11\theta)) = -\frac{1}{2}(x_1+x_2) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
y_3y_4 &= (\cos(\theta)+\cos(13\theta))(\cos(9\theta)+\cos(15\theta))\\
&= \cos(\theta)\cos(9\theta)+\cos(\theta)\cos(15\theta)+\cos(13\theta)\cos(9\theta)+\cos(13\theta)\cos(15\theta)\\
&= \frac{1}{2}(\cos(10\theta)+\cos(8\theta)+\cos(16\theta)+\cos(14\theta)+\cos(22\theta)+\cos(4\theta)\\
&\quad +\cos(28\theta)+\cos(2\theta))\\
&= -\frac{1}{2}(\cos(7\theta)+\cos(9\theta)+\cos(\theta)+\cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(13\theta)\\
&\quad +\cos(11\theta)+\cos(15\theta)) = -\frac{1}{2}(x_1+x_2) = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

b. 3 points+3 points. On a

$$\begin{cases} y_1y_2 = -\dfrac{1}{4} \\ y_1+y_2 = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Donc y_1 et y_2 sont les deux racines de l'équation :

$$Y^2 - \frac{1+\sqrt{17}}{4}Y - \frac{1}{4} = 0$$

Sont discriminant vaut

$$\Delta = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1+2\sqrt{17}+17}{16} + 1 = \frac{34+2\sqrt{17}}{16}$$

Les solutions sont dont

$$\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{8} - \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}; \frac{1+\sqrt{17}}{8} + \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}\right\}$$

Comme $0 < 3\theta < \frac{\pi}{2}$ et que $0 < 5\theta < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(3\theta) > 0$ et $\cos(5\theta) > 0$, par conséquent $y_1 > 0$

Cela donne

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$$

On a

$$\begin{cases} y_3y_4 = -\dfrac{1}{4} \\ y_3+y_4 = x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Donc y_1 et y_2 sont les deux racines de l'équation :

$$Y^2 - \frac{1-\sqrt{17}}{4}Y - \frac{1}{4} = 0$$

Sont discriminant vaut

$$\Delta = \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1-2\sqrt{17}+17}{16} + 1 = \frac{34-2\sqrt{17}}{16}$$

Les solutions sont dont

$$\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{8} - \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}; \frac{1-\sqrt{17}}{8} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}\right\}$$

Comme $\frac{\pi}{2} < 9\theta < \pi$ et que $\frac{\pi}{2} < 15\theta < \pi$, on a $\cos(9\theta) < 0$ et $\cos(15\theta) < 0$, par conséquent $y_4 < 0$

Cela donne

$$y_3 = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \quad \text{et} \quad y_4 = \frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

3. 3 points.

$$\cos(\theta)\cos(13\theta) = \frac{1}{2}(\cos(14\theta) + \cos(12\theta)) = \frac{1}{2}(-\cos(3\theta) - \cos(5\theta)) = -\frac{1}{2}y_1$$
$$= -\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$$

Comme

$$y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta) = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

$\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$ sont les deux racines de :

$$X^2 - \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}X - \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16} = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = \left(\frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}\right)^2 + 4\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$$
$$= \frac{1+17+34-2\sqrt{17}-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{64}$$
$$+16\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{64}$$
$$= \frac{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{64}$$
$$= \frac{68+12\sqrt{17}+2\left(\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}+8\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)}{64}$$

Puis on « arrange » $\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}+8\sqrt{34+2\sqrt{17}}$

$$\left(\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}+8\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)^2$$
$$= \left(\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)^2 - 16\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$
$$+\left(8\sqrt{34+2\sqrt{17})}\right)^2$$
$$= \left(1-2\sqrt{17}+17\right)\left(34-2\sqrt{17}\right) - 16\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34^2-4\times 17} + 64\left(34+2\sqrt{17}\right)$$
$$= \left(18-2\sqrt{17}\right)\left(34-2\sqrt{17}\right) - 16\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{4\times 17^2-4\times 17} + 64\times 17\times 2 + 128\sqrt{17}$$
$$= 18\times 2\times 17 - 36\times\sqrt{17} - 68\sqrt{17} + 4\times 17 - 16\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{4\times 17(17-1)} + 64\times 17$$
$$\times 2 + 128\sqrt{17}$$
$$= 9\times 4\times 17 - 104\sqrt{17} + 4\times 17 - 16\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{4\times 17\times 16} + 32\times 17\times 4 + 128\sqrt{17}$$
$$= 9\times 4\times 17 - 104\sqrt{17} + 4\times 17 - 16\times 8\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{17} + 32\times 17\times 4 + 128\sqrt{17}$$
$$= 9\times 4\times 17 - 104\sqrt{17} + 4\times 17 - 16\times 8\sqrt{17} - 16\times 8\times 17 + 32\times 17\times 4 + 128\sqrt{17}$$
$$= 4\times 17(9+1-32+32) + 152\sqrt{17} = 680 + 152\sqrt{17}$$

Comme il est à peu clair que $\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}+8\sqrt{34+2\sqrt{17}} > 0$

On en déduit que

$$\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}+8\sqrt{34+2\sqrt{17}} = +\sqrt{680+152\sqrt{17}}$$

Finalement

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}}}{8}$$

L'autre solution étant manifestement négative.

Annexe :

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Cela s'appelle linéariser $\cos(a)\cos(b)$.

$$\sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$$

2. Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $p = ab$ et $s = a + b$ alors a et b sont les deux solutions de l'équation

$$X^2 - sX + p = 0$$

3.

$$\cos(2\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{15\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{15\pi}{17}\right) = -\cos(15\theta)$$

$$\cos(4\theta) = \cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{13\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{13\pi}{17}\right) = -\cos(13\theta)$$

$$\cos(6\theta) = \cos\left(\frac{6\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{6\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos(11\theta)$$

$$\cos(8\theta) = \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{8\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{9\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{9\pi}{17}\right) = -\cos(9\theta)$$

$$\cos(10\theta) = \cos\left(\frac{10\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{10\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{7\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{17}\right) = -\cos(7\theta)$$

$$\cos(12\theta) = \cos\left(\frac{12\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{12\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{5\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{17}\right) = -\cos(5\theta)$$

$$\cos(14\theta) = \cos\left(\frac{14\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{14\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{3\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) = -\cos(3\theta)$$

$$\cos(16\theta) = \cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{16\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -\cos(\theta)$$

$$\cos(18\theta) = \cos\left(\frac{18\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -\cos(\theta)$$

$$\cos(20\theta) = \cos\left(\frac{20\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) = -\cos(3\theta)$$

$$\cos(22\theta) = \cos\left(\frac{22\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{17}\right) = -\cos(5\theta)$$

$$\cos(24\theta) = \cos\left(\frac{24\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{17}\right) = -\cos(7\theta)$$

$$\cos(26\theta) = \cos\left(\frac{26\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{9\pi}{17}\right) = -\cos(9\theta)$$

$$\cos(28\theta) = \cos\left(\frac{28\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos(11\theta)$$